

М. У. САГИТОВ

ПОСТОЯННАЯ ТЯГОТЕНИЯ И МАССА ЗЕМЛИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

Постоянная тяготения и масса Земли, Сагитов М. У., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1969, 188 стр.

В книге описываются исследования по определению постоянной тяготения, массы и средней плотности Земли.

В первой главе рассказывается о постоянной тяготения, выраженной в различных системах единиц. Вторая глава начинается с изложения идеи определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов. Далее описываются конкретные опыты Кавендиша, Райха, Бейли, Бойса, Этвеша, Брауна, Хейла и Хрижановского. Рассмотрению опытов с весами, осуществленных Йолли, Пойнтингом, Рихарцем и Кригар-Менцелем, посвящена следующая глава. В четвертой главе собрано описание некоторых оригинальных идей опытов как реализованных, так и оставшихся неосуществленными. Пятая глава книги содержит теорию нелинейных колебаний применительно к задаче определения постоянной тяготения.

Рисунков 26, таблиц 30, библиографических ссылок 106.

Марат Усманович Сагитов

Постоянная тяготения и масса Земли

М., 1969 г., 188 стр. с илл.

Редактор В. В. Подобед

Техн. редактор А. А. Благовещенская

Корректор Г. С. Смоликова

Сдано в набор 3/1 1969 г.

Подписано к печати 7/V 1969 г.

Бумага

84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 5.875.

Условн. печ. л. 9,87.

Уч.-изд. л. 9,66

Тираж 2500 экз.

Т-06920.

Цена книги 83 коп.

Заказ № 1557

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва В-71, Ленинский проспект 15.

2-я типография Издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

Оглавление

Предисловие	5
Введение	7
Г л а в а I. Некоторые сведения о постоянной тяготения, массе и средней плотности Земли	10
§ 1. История открытия закона тяготения	10
§ 2. Постоянная тяготения в различных системах единиц	16
§ 3. Геоцентрическая гравитационная постоянная	22
§ 4. Масса и средняя плотность Земли	31
§ 5. Определение средней плотности Земли путем срав- нения притяжения больших природных масс с при- тяжением всей Земли	32
Г л а в а II. Определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов	41
§ 6. Идея и основы теории способа определения постоян- ной тяготения с помощью крутильных весов	41
§ 7. Опыты Кавендиша—первые измерения силы вза- имного притяжения между небольшими массами	46
§ 8. Работы Райха по измерению массы и средней плот- ности Земли	49
§ 9. Определения Бейли средней плотности Земли	51
§ 10. Опыты Корню и Бейля	54
§ 11. Опыты по определению постоянной тяготения с ми- ниатюрной аппаратурой	57
§ 12. Экспериментальные и теоретические исследования Этвеша по определению постоянной тяготения	61
§ 13. Измерения постоянной тяготения Брауном	69
§ 14. Определения постоянной тяготения Хейлом	74
§ 15. Определения постоянной тяготения Хейлом и Хржановским	81
§ 16. Анализ результатов всех определений постоянной тяготения с помощью крутильных весов	86
Г л а в а III. Определения постоянной тяготения из опы- тов с вертикальными весами	94
§ 17. Опыты Йолли по определению средней плотности Земли.	94
§ 18. Работа Пойнтинга по измерению постоянной тяго- тения.	98

§ 19. Модификация опыта с вертикальными весами в экспериментах Кенига, Рихарца и Кригар-Менцеля	104
§ 20. Анализ результатов экспериментов с вертикальными весами	108
Г л а в а IV. Другие опыты по измерению постоянной тяготения	113
§ 21. Опыты с вертикальным маятником, обладающим большим периодом колебаний	113
§ 22. Метод Зарадничека для определения малых эффектов притяжения	122
§ 23. Повышение чувствительности крутильных весов, осуществленное Бюргессом и Танглем	126
§ 24. Определение постоянной тяготения и массы Земли по изменению формы уровенной поверхности . .	130
§ 25. Сводка результатов опытов, описанных в настоящей главе	133
§ 26. Замечания об опытах по определению зависимости постоянной тяготения от различных факторов . . .	137
Г л а в а V. Уточненная теория определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов	147
§ 27. Постановка задачи	147
§ 28. Момент сил притяжения	148
§ 29. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний и его решение в первом приближении . . .	158
§ 30. Решение дифференциального уравнения крутильных колебаний во втором приближении	167
§ 31. Применение описанной теории к задаче определения постоянной тяготения	172
Заключение	177
Литература	180
Указатель имен	187

Предисловие

В настоящей книге мы расскажем о работах, посвященных определению постоянной тяготения, массы и средней плотности Земли различными методами и приборами. Определение средней плотности и массы Земли требует знания не только постоянной тяготения, но и силы тяжести, размеров и формы Земли. Одни авторы конечной целью своих исследований ставили определение средней плотности и массы Земли, а другие ограничивались постоянной тяготения. В книге подробно описываются две ярко выраженные группы опытов по определению постоянной тяготения, массы и средней плотности Земли: с крутильными весами, выполненные Г. Кавендишем, К. Бойсом, К. Брауном, П. Хейлом, П. Хржановским и др. и с вертикальными весами, которые осуществили Ф. Йолли, Д. Пойнтинг, Ф. Рихарц с О. Кригар-Менцелем и др. Несколько особняком стоят опыты И. Вильзинга, Н. Зарадничека, А. Гершуна и др. Нами проведен анализ каждой группы опытов, составлены сводные таблицы результатов, основных характеристик используемой аппаратуры и некоторых условий проведения опытов. Хронологический порядок описания опытов в каждой отдельной группе позволил проследить повышение точности результатов определения постоянной тяготения по мере совершенствования теории и техники проведения эксперимента.

Естественно, что большее внимание уделено более поздним работам. Анализ всех обстоятельств показывает, что повысить точность нового определения постоянной тяготения с помощью современных методов и средств хотя и возможно, но достаточно трудно. Именно знакомство с историей определения постоянной тяготения позволяет понять неоптимистическое заключение П. Дике, сделанное

им в 1961 г. после подведения итогов определения эквивалентности инерциальной и гравитационной масс. Он констатировал, что в итоге многомесячных опытов, применяя современные средства измерения, удалось повысить точность эксперимента Р. Этвеша шестидесятилетней давности всего только в 50 раз.

Книга заканчивается главой, в которой рассмотрена уточненная теория крутильных колебаний коромысла с массами в гравитационном поле двух неподвижных масс. Задача сведена к решению неоднородного нелинейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и найдено его приближенное асимптотическое решение. Теория рассмотренных колебаний может быть использована в задаче определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов.

В отечественной литературе отсутствуют сколько-нибудь подробные обзоры работ по определению постоянной тяготения, массы и средней плотности Земли. На английском языке имеется хороший обзор Д. Пойнтинга, но он охватывает работы лишь до 1893 г. Поэтому мы надеемся, что наша книга поможет читателям ознакомиться с проведенными экспериментами, и, возможно, стимулирует новые работы в этом направлении.

В заключение хочется назвать лиц, которые оказали автору помощь при работе над книгой. Т. С. Чеснокова и Л. Н. Хармаджев провели ряд вычислений и проверок формул, доктор физико-математических наук В. Б. Брагинский сделал ряд полезных замечаний. Особенно много ценных советов автор получил от рецензента рукописи академика А. А. Михайлова и доцента В. В. Подобеда, осуществившего ее научное редактирование.

Государственный
Астрономический институт
им. П. К. Штернберга

М. У. Сагитов

Введение

Развитие науки сопровождается установлением новых количественных соотношений между различными величинами, характеризующими явления природы. В этих соотношениях важную роль играют различные постоянные величины. От точности знания этих постоянных зависит в конце концов точность физических и технических измерений, проводимых в своей практике человеком. По мере разработки новой методики и техники измерений значения постоянных непрерывно уточняются. Среди фундаментальных постоянных большую роль играют постоянная тяготения, масса и средняя плотность Земли. Эти постоянные используются в различных отраслях науки: первая — в астрономии и физике, а значения массы и средней плотности Земли — в астрономии и геофизике.

Закон тяготения Ньютона, коэффициентом пропорциональности которого является постоянная тяготения, определяет движения небесных тел, их форму, а также в известном смысле и их размеры. Форма, размеры и внутреннее строение Земли в свою очередь определяют характер ее прецессионных, нутационных и других движений. Таким образом, в системе астрономических постоянных большинство постоянных, в конечном итоге, обусловлено свойствами гравитационного поля.

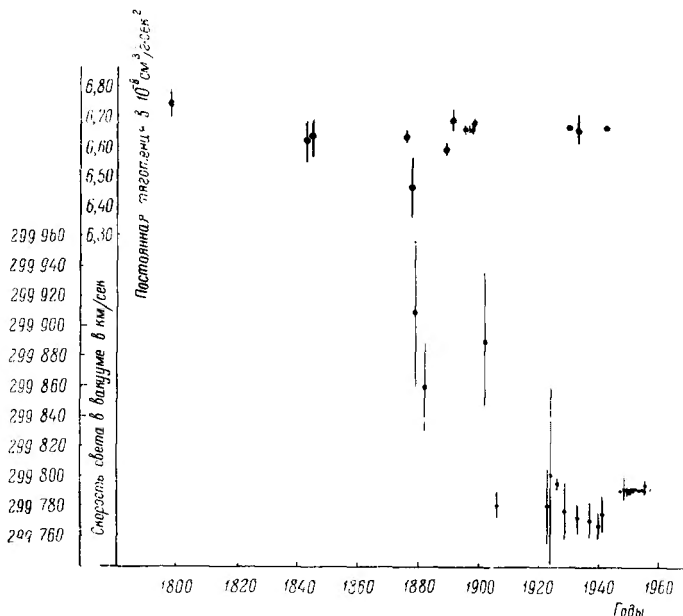
Неоднородная плотность вещества внутри Земли вызывает аномалии внешнего гравитационного поля земного шара, что позволяет изучать распределение масс в верхних слоях Земли. Это имеет большое прикладное значение. Для определения количественных характеристик распределения неоднородных масс (глубины залегания, размеров и т. д.) требуется знание постоянной тяготения.

Массы звезд и планет в астрономии определяются в единицах массы Солнца или Земли, таким образом, массы последних, по существу, задают масштаб масс во Вселенной. В земных условиях большинство измерений масс и

расстояний проводится в метрической системе единиц. Выразить массы астрономических тел в метрической системе можно только зная массу Земли в этой системе.

Постоянная тяготения связана также со многими понятиями теоретической физики.

Значения постоянной тяготения и массы Земли, несмотря на длительность их использования, до настоящего времени известны с очень низкой точностью. На рис. 1 приведены



ис. Р1. Уточнение постоянной тяготения γ и скорости света c .

полученные в течение последних двух столетий значения постоянной тяготения и скорости света в вакууме. Точность определения характеризуется вертикальной чертой, длина которой пропорциональна величине ошибки. График наглядно показывает большой прогресс в определении скорости света. Относительная точность современного значения скорости света составляет $1 \cdot 10^{-6}$. Значение же постоянной тяготения улучшено за это время незначительно и относительная точность ее определений состав-

ляет в настоящее время всего $5 \cdot 10^{-4}$. Такова же и относительная точность современного значения массы и средней плотности Земли, поскольку их точность целиком зависит от точности определения постоянной тяготения.

Причина столь невысокой относительной точности определения постоянной тяготения, состоит в трудности измерения малой силы взаимного притяжения между взаимодействующими массами. Так, десятикилограммовая шаровая масса на расстоянии 12 см от своего центра создает ускорение притяжения, равное всего $5 \cdot 10^{-6}$ см/сек². Поэтому, чтобы измерить ее с относительной точностью хотя бы 10^{-6} , чувствительность аппаратуры по отношению к ускорению притяжения должна быть $5 \cdot 10^{-12}$ см/сек². Трудность определения постоянной тяготения усугубляется еще тем обстоятельством, что требуется измерять ускорение притяжения в метрической системе единиц массы, длины и времени, т. е. производить абсолютные измерения. В противоположность этому близкие по методике опыты по установлению эквивалентности инерциальной и гравитационной масс, по выявлению влияния промежуточной среды на гравитационное взаимодействие масс являются дифференциальными. В них, естественно, можно достичь гораздо большей относительной точности. Действительно, в лучших опытах П. Хейла и П. Хржановского по определению постоянной тяготения достигнута относительная точность порядка $5 \cdot 10^{-4}$, в то время как в опытах по установлению эквивалентности инерциальной и гравитационной масс П. Дике получил $2 \cdot 10^{-11}$. В опытах В. Б. Брагинского по выявлению влияния промежуточного слоя масс на гравитационное взаимодействие была достигнута относительная точность $5 \cdot 10^{-12}$. Такого же порядка и относительная точность опытов по определению зависимости гравитационного взаимодействия масс от их температуры, которые также относятся к разряду дифференциальных.

Со времени последних опытов, определявших постоянную тяготения, произошло совершенствование техники измерений расстояний, масс и времени. Развитие теории нелинейных колебаний позволяет построить более точную теорию эксперимента. Сейчас вновь возник интерес к проблеме определения постоянной тяготения.

Некоторые сведения о постоянной тяготения, массе и средней плотности Земли

§ 1. История открытия закона тяготения

Прогресс науки проявляется в открытии все новых и новых закономерностей природы. Сначала устанавливается качественная сторона той или иной закономерности, а затем уже — количественная. Последняя позволяет более глубоко проникнуть в суть явления и использовать открытую закономерность для научного предвидения и для практики. Одним из фундаментальнейших достижений человеческого ума является открытие закона всемирного тяготения. Ему предшествовала серия научных исследований в астрономии и механике, подготовивших почву для установления этого закона.

К моменту открытия закона всемирного тяготения в астрономии уже утвердилась идея гелиоцентрической системы мира Н. Коперника (1473—1543). Коперник доказал, что Земля и другие планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца. Этим движением и суточным вращением Земли объясняется видимое перемещение светил на небесном своде. Были опровергнуты тысячелетние представления людей о геоцентрической системе мира. Это был переворот в сознании человечества.

На основании эмпирических исследований, сопряженных с грандиозными вычислениями, И. Кеплер (1571—1630) установил законы движения планет Солнечной системы. Кеплер уже начал осознавать, что планеты на орбитах удерживаются силой притяжения Солнца; тяжесть тел он рассматривал как результат притяжения тел Землей. В 1610 г. Кеплер писал: «...тяготение есть взаимное телесное расположение (аффектация) двух сродственных тел к объединению и соединению, каковыми по их при-

роде являются магнитные свойства; так что гораздо более Земля притягивает камень, чем камень стремится к Земле... Если бы Земля перестала притягивать свои воды, то все воды морей поднялись бы и вытекли в тело Луны». Более того, Кеплер объяснял приливы моря притяжением Солнца и Луны. Однако он, не зная еще самого закона тяготения, не мог увязать механику движения планет Солнечной системы с силой, вызывающей эти движения, а также не мог построить удовлетворительную теорию приливов.

В то же самое время, когда Кеплер открывал законы движения планет Солнечной системы, Г. Галилей (1564—1642), опираясь на умело поставленные в земных условиях опыты, установил ряд принципов и закономерностей механики. Он сформулировал принцип относительности равномерного прямолинейного движения, установил законы инерции, сложения скоростей, движения маятника и др. Особенно большое значение имели для установления закона всемирного тяготения исследования Галилеем закономерностей падения тел. Он пришел к выводу, что под действием постоянной силы тело совершает равноускоренное движение, а не движется с постоянной скоростью, как считали до него. В частности, в своей книге «Диалог о двух главнейших системах мира — птоломеевой и коперниковой» Галилей применяет открытый им закон равноускоренного движения для расчета времени t падения Луны на Землю, используя хорошо известную нам формулу

$$t = \sqrt{2S:g},$$

где S — путь, проходимый телом, g — ускорение силы тяжести. Поскольку он не знал закона тяготения, то ошибочно предполагал ускорение силы тяжести постоянным на всем пути падения Луны.

Большее сожаление вызывает не эта ошибка, а то, что Галилей был далек от мысли, что само движение Луны вокруг Земли, Земли и планет вокруг Солнца связано с притяжением центрального тела. Он не предполагал, что сила притяжения Земли сдерживает Луну на ее орбите при обращении вокруг Земли. Галилей думал, что сила притяжения не может действовать на расстоянии и

действует только в ближайшей окрестности поверхности Земли. Он возражал Кеплеру, считавшему, что морские приливы вызываются притяжением Солнца и Луны, называя эти идеи Кеплера «детской выдумкой». Установив ряд законов в механике, сделав большое число открытий в наблюдательной астрономии, Галилей все же не воспринял законов планетных движений Кеплера.

Современник Ньютона Х. Гюйгенс (1629—1695) провел ряд существенных исследований по механике. В 1673 г. он опубликовал формулу для определения центростремительной силы, возникающей при движении тела по кругу. В одной из работ Гюйгенса, вышедшей из печати в 1703 г., уже после его смерти, проведена аналогия между законом движения по окружности и законом падения тел. Гюйгенс считал, что центростремительная сила как бы заставляет тело непрерывно «падать» с касательной на соответствующую точку окружности, т. е. центростремительная сила уподоблялась им силе тяжести. Он вывел зависимость периода колебаний маятника от его длины и от силы тяжести, нашел закон сохранения суммы количества движений и суммы живых сил и открыл другие закономерности механики.

Помимо развития общих принципов и законов механики, подготовивших открытие закона всемирного тяготения, важно указать еще на работы ряда ученых, пытавшихся сформулировать непосредственно закон тяготения. На них ссылается Ньютон в своих «Началах», как на своих непосредственных предшественников. Французский астроном И. Бульо (1605—1694) в 1645 г., полемизируя с Кеплером, считал притяжение между телами убывающим обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Итальянец Д. Борелли (1608—1679), изучая движение спутников Юпитера, пришел в 1666 г. к выводу, что спутники обращаются вокруг планеты под действием притяжения, стремясь удалиться от центрального тела по касательной к орбите. Однако это стремление сдерживается притяжением центрального тела. Именно эта идея Борелли была развита в дальнейшем Гюйгенсом.

Особенно большой вклад в окончательную формулировку закона тяготения внес Р. Гук (1635—1703). Он исходил из предположений, что: а) все небесные тела об-

ладают силой притяжения, направленной к их центру; б) тело, раз приведенное в равномерное прямолинейное движение, будет двигаться по прямой до тех пор, пока на него не подействуют другие силы, изменяющие направление его движения; в) притяжение между телами тем больше, чем меньше между ними расстояние. В работе, относящейся к 1674 г., где формулировались эти предположения, Гук еще не упоминает закона изменения притяжения с расстоянием. Но уже через шесть лет, при расчете отклонения падающего с высоты тела, Гук предполагает, что сила притяжения изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между телом и центром Земли. Он ставит специальные опыты для установления закона изменения силы тяжести с высотой, но вследствие недостаточной точности измерений не получает положительного результата. О законе тяготения Гук строил только догадки, его утверждения не всегда последовательны. Они делались на основании интуиции экспериментатора, которая у Гука была необычайно высока, о чем свидетельствуют и многие другие его исследования по физике и механике.

В 1683 г. астроном Э. Галлей (1656—1742), ученик и близкий друг Ньютона, выводит из третьего закона Кеплера, что притяжение между планетами и Солнцем изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Примерно в это же время Гук и Х. Рен (1632—1723), а также Галлей рассматривают такую задачу: какую кривую опишет небесное тело при движении под действием притяжения, изменяющегося обратно пропорционально квадрату расстояния? Все трое чувствуют интуитивно, что такой кривой должен быть эллипс, но они еще не могут доказать этого аналитически.

Таким образом, до Ньютона все представления о законе тяготения были умозрительные, интуитивные и поэтому указывавшийся характер изменения притяжения не мог быть назван законом тяготения. Ньютон объединил предположения своих предшественников, четко сформулировал закон тяготения и дал его аналитическое выражение. Это было доступно только Ньютону — гениальному математику, механику, физику и астроному. Сам он считал своей заслугой, во-первых, вывод аналитического

выражения, описывающего изменение силы тяжести, во-вторых, доказательство тождества силы тяжести на Земле и силы притяжения планет, как и всех тел друг к другу. По собственным утверждениям Ньютона в его письмах к Галлею, закон изменения притяжения с расстоянием он установил в 1666 г., т. е. еще в студенческие годы. Для числовой проверки предположения, что движение Луны определяется притяжением Земли, необходимо было знать значение силы тяжести и радиус Земли, расстояние до Луны и период ее обращения вокруг Земли. Отсутствие достаточно надежных данных о радиусе Земли и расстоянии до Луны привело к тому, что Ньютон первоначально не получил хорошего согласия своих выводов с наблюдениями. Существует мнение, что именно поэтому он и задержал опубликование результатов своих исследований, и даже временно перестал заниматься вопросами тяготения.

В несохранившемся до наших дней трактате Ньютона «О движении» (1684 г.), по свидетельству Галлея, уже имелась формулировка закона тяготения. По настоянию Галлея Ньютон изложил содержание трактата в рукописи, направленной Королевскому Обществу, чтобы ее включить в протокол и тем закрепить свой приоритет. Содержание упомянутого трактата Ньютона было основой для первых двух глав фундаментальнейшего труда Ньютона «Математические начала натуральной философии», который вышел из печати в 1687 г. [20]. В «Началах» он дает формулировку закона тяготения, сущность которого сводится к следующему: сила притяжения между двумя материальными частицами прямо пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Аналитическое выражение всемирного закона тяготения Ньютона записывается в виде

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

где m_1, m_2 — притягивающиеся массы (под ними Ньютон подразумевал частицы, употребляя латинское слово «corpusculum»), r — расстояние между частицами, f — постоянная тяготения или гравитационная постоянная, которой и посвящена настоящая книга.

Поскольку тела в природе состоят из большого числа материальных частиц, то при определении притяжения между двумя телами необходимо суммировать взаимодействия всевозможных комбинаций частиц первого и второго тела. Составляющие притяжения по координатным осям x , y , z некоторой прямоугольной системы координат для двух взаимопритягивающихся тел произвольной формы Ω_1 и Ω_2 и произвольной плотности можно записать в виде

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x},$$

$$F_y = \frac{\partial W}{\partial y},$$

$$F_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

где W — потенциал взаимного притяжения упомянутых двух тел, равный

$$W = f \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \frac{dm_1 dm_2}{r}.$$

Здесь, как и в формуле (1), f является постоянной тяготения.

Ньютон полагал, что постоянная тяготения для всех тел одна и та же, независимо от химического состава, физического состояния, а также расстояния между притягивающимися телами. По закону Ньютона тело падает на Землю, по этому же закону происходит притяжение планет Солнцем, как следствие этого закона планеты движутся по коническому сечению, в фокусе которого находится Солнце. Используя новые данные о размерах Земли, полученные к тому времени из градусных измерений Ж. Пикаром (1620—1682), Ньютон на основе закона тяготения перевычислил орбиту движения Луны, добившись очень хорошего согласия с наблюдениями. Ньютон, исходя из закона тяготения, объяснил движение планет Солнечной системы, комет, спутников, планет. В основе многих существующих ныне теорий — движения небесных тел, фигуры Земли, морских приливов и пр. — лежит закон тяготения Ньютона.

§ 2. Постоянная тяготения в различных системах единиц

При решении различных задач используется постоянная тяготения, выраженная в различных системах единиц измерения массы, длины и времени. В зависимости от выбора системы единиц можно установить несколько числовых значений постоянной тяготения, каждая из которых имеет определенное название: *кавендиша*, *гауссова*, *эйнштейна*, *геоцентрическая*, *гелиоцентрическая* и др. *постоянная*. Можно усмотреть два принципиально различных подхода в установлении размерности и числового значения постоянной тяготения.

Один подход к определению постоянной тяготения состоит в том, что опытным путем устанавливается соотношение между силой взаимного притяжения и величинами измеренных масс, расположенных на определенном расстоянии друг от друга. При этом сила измеряется в принятой системе единиц измерения массы, длины и времени. Постоянная тяготения рассматривается в этом случае как экспериментально устанавливаемый коэффициент пропорциональности в уравнении (1), связывающем силу тяготения с притягивающими массами m_1 и m_2 и с расстоянием r между ними. Такое экспериментальное определение постоянной тяготения f провел Г. Кавендиш через 110 лет после открытия Ньютоном закона тяготения. В гл. II мы подробно опишем эти эксперименты. Здесь же подчеркнем большое принципиальное значение опытов Кавендиша, которое не ограничивается получением числового значения постоянной тяготения, всего лишь на 10% отличающегося от его современного значения, а заключается главным образом в том, что впервые опытным путем подтверждена справедливость закона тяготения не только для небесных тел, но и для небольших по массе земных тел. В дальнейшем мы будем называть постоянную тяготения, определенную описанным путем, *кавендиша гравитационной постоянной*, или, более кратко, *кавендиша постоянной*. Ее размерность выводится следующим образом. Размерность силы F определяется из второго закона Ньютона, согласно которому сила равна произведению массы на ускорение. Тогда постоянная тяготения

будет иметь размерность *)

$$[f] = [L]^3 [M]^{-1} [T]^{-2},$$

где L — длина, M — масса, а T — время.

Предполагается, что инерциальная масса, которая фигурирует во втором законе Ньютона, и гравитационная — в законе тяготения — эквивалентны друг другу. Численно в системе СИ кавендиша гравитационная постоянная равна

$$f = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2.$$

В теоретической физике вместо кавендиша гравитационной постоянной f используется иногда величина κ , выраженная в метрической системе единиц и связанная с f соотношением

$$\kappa = \frac{8\pi f}{c^2} = 1,865 \cdot 10^{-28} \text{ м/кг},$$

где c — скорость света. Величину κ будем называть *эйнштейна гравитационной постоянной*.

При другом подходе к выводу постоянной тяготения в качестве постоянной тяготения принимается заранее выбранное число, которое удовлетворяет определяющему эту постоянную уравнению благодаря соответствующему выбору единиц для измерения массы, длины и времени или их комбинации. Так устанавливается постоянная тяготения в астрономии. Хотя в качестве уравнения, определяющего такую гравитационную постоянную, используется третий закон Кеплера, все же в основе такого определения лежит закон тяготения Ньютона.

Напомним вывод третьего закона Кеплера из закона тяготения Ньютона. Рассмотрим две точечные массы M и m , притягивающиеся по закону, описываемому формулой (1), и движущиеся вследствие этого с ускорениями.

*) Если определить силу из закона тяготения Ньютона, приняв постоянную тяготения $f = 1$, то тогда должна быть введена некоторая размерная постоянная f_1 в формуле, представляющей второй закон Ньютона $F = f_1 m a$, где m — масса, a — ускорение. Сила F по новому определению имеет размерность $[F] = [M]^2 [L]^{-2}$, а постоянная f_1 $[f_1] = [M] [L]^{-3} [T]^2$. Численно f_1 равна

$$1,499 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^3.$$

Уравнения движения массы m относительно массы M в полярной системе координат (ρ, φ) с началом в центре массы M имеют вид

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = - \frac{\mu}{\rho^2}, \quad (2)$$

$$\rho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = h, \quad (3)$$

где $\mu = f(m + M)$, ρ — расстояние массы m от начала координат, φ — полярный угол направления на массу m , а h — произвольная постоянная. Смысл последней становится очевидным, если обратить внимание на то, что уравнение (3) является аналитическим выражением второго закона Кеплера. Согласно этому закону масса m описывает вокруг массы M плоскую кривую по закону площадей так, что

$$\frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T} = h, \quad (4)$$

где a и b — полуоси эллиптической орбиты, T — период обращения массы m , а e — эксцентриситет ее орбиты.

Исключив $d\varphi/dt$ из уравнения (2) с помощью равенства (3) и решая его, получим

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \omega)}, \quad (5)$$

где $P = h^2/\mu$, а ω — произвольная постоянная, зависящая от выбора направления полярной оси, относительно которой отсчитывается угол φ . Уравнение (5) есть уравнение эллипса с фокальным параметром P . Но известно, что для эллипса фокальный параметр равен

$$P = a(1 - e^2).$$

Следовательно,

$$h = \mu a(1 - e^2). \quad (6)$$

Возводя в квадрат обе части равенства (4) и приравнивая левую часть полученного равенства левой части равенства (6), получим аналитическое выражение третьего

закона Кеплера

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}. \quad (7)$$

Перепишем формулу (7) применительно к движению центра тяжести Земли и Луны вокруг Солнца в виде

$$k^2 = \frac{4\pi^2 A_0^3}{T^2 (M_\odot + M_\oplus + M_\zeta)}; \quad (8)$$

здесь T — продолжительность сидерического года в эфемеридных сутках, A_0 — расстояние, близкое к размеру большой полуоси орбиты движения центра тяжести системы Земля — Луна вокруг Солнца; $M_\odot$, $M_\oplus$, M_ζ — массы Солнца, Земли, Луны, k — постоянная тяготения, названная в честь Гаусса (1777—1855) *гауссовой гравитационной постоянной*. Часто ссылаются на то, что k названа в честь Гаусса потому, что в книге «Theorie motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium», он впервые вывел значение k . Однако в действительности это не так. Значение k мы находим и у самого Ньютона [20, стр. 619]. Ньютон получил $k = 0,01720212$ вместо $k = 0,01720209895$, найденного Гауссом 120 лет спустя. Вывод Ньютоном значения постоянной тяготения k не был понят многими его современниками. Как указывает А. Н. Крылов [17], переводчик «Начал» Ньютона на немецкий язык И. Вольферс не понял обозначения этого числа у Ньютона через X , в связи с чем и написал: «точка X на чертеже не показана».

Первоначально числовое значение гауссовой постоянной k выводили по формуле (8), принимая $M_\odot = 1$ и $A_0 = 1$, а период T и отношение масс $\frac{M_\oplus + M_\zeta}{M_\odot}$ определяя из наблюдений. Так поступали Ньютон, Гаусс и другие. Однако, поскольку из наблюдений значения T и $\frac{M_\oplus + M_\zeta}{M_\odot}$ постоянно уточняются, это должно приводить к изменению значения k . Поэтому ныне поступают следующим образом. Заранее полагают гауссову постоянную k абсолютно точной

$$k = 0,01720209895.$$

Принимают $M_{\odot} = 1$, а T и $\frac{M_{\oplus} + M_{\text{т}}}{M_{\odot}}$ определяют из наблюдений. Значение же A_0 , незначительно отличающееся от единицы, вычисляют из соотношения (8). Единица расстояния становится производной величиной, соответствующей определенному заранее фиксированному значению гауссовой постоянной k и называется она *астрономической единицей* (а. е.)

При таком подходе к определению постоянной тяготения остаются неопределенными масса Солнца $M_{\odot}$ и астрономическая единица A_0 в том смысле, что мы не знаем без дополнительных специальных измерений соотношения этих единиц с соответствующими единицами массы и расстояния в системе единиц, принятых для земных измерений. Для перевода $M_{\odot}$ и A_0 в эту систему единиц необходимо знать соответствующие масштабные коэффициенты. Масштабный коэффициент для выражения астрономической единицы в метрах ныне принимается на основе многочисленных определений равным $1 : 149\,600\,000\,000$. Масштабный коэффициент для массы, т. е. отношение килограмма к массе Солнца принимается равным $1 : 1983 \cdot 10^{27}$. Для определения этого отношения необходимо знание кавендиша гравитационной постоянной. Гауссова постоянная связана с кавендиша постоянной соотношением

$$k^2 = f \frac{\bar{M}_{\odot} \bar{T}^2}{A_0^3},$$

где $\bar{M}_{\odot}$ — масса Солнца в килограммах, $\bar{T}$ — число секунд в эфемеридных сутках, A_0 — астрономическая единица в метрах, а постоянная тяготения f соответственно в системе единиц СИ.

В ряде астрономических задач постоянная тяготения считается равной единице; в этом случае за единицу времени принимают 58,132441 средних солнечных суток, за единицу массы массу Солнца, а за единицу длины — астрономическую единицу.

При небесно-механических расчетах, связанных с движением искусственных и естественных спутников вокруг Земли, удобно использовать так называемую геоцентри-

ческую гравитационную постоянную. Ей будет посвящен следующий параграф.

Во всех прежних определениях постоянной тяготения в качестве единиц измерения массы, длины и времени использовались довольно случайные величины. Так, в основе кавендиша гравитационной постоянной лежит система единиц СИ, в которой единица длины — метр — равна $1650763,73$ длин волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2P_{10}$ и $5d_5$ атома криптона 86; единица массы — килограмм — представляет массу международного прототипа килограмма, хранящегося в Международном бюро мер и весов; секунда — единица времени, равная по продолжительности $1 : 31556925,9747$ части тропического года для 1900 г. января 0 в 12^h эфемеридного времени. Гауссова гравитационная постоянная выводится на основе массы Солнца, астрономической единицы и периода обращения системы Земля + Луна вокруг Солнца. Все эти характеристики тоже частные, присущие Солнечной системе.

Постоянная же тяготения, как и ряд других физических постоянных (скорость света, постоянная Планка и др.), отражает некоторые фундаментальные свойства объективно существующего мира. Но в силу случайного характера единиц измерений эти постоянные выражаются иррациональными числами. Однако можно выбрать упомянутые постоянные равными единице и определить соответствующие им абсолютные единицы массы, длины и времени. Равенства единице постоянной тяготения можно добиться изменением одной или нескольких единиц измерения (длины, массы и времени). Если измерять только одну из них, то новые единицы измерения (массы, длины и времени) будут выражаться так, как это представлено в табл. 1.

В свое время Г. Липман [72] предлагал использовать закон тяготения Ньютона для введения единицы времени, не связанной с суточным вращением Земли. Если при прежних единицах длины (см) и массы (г) за единицу времени принять такую единицу, при которой постоянная тяготения равняется единице, то эта новая единица времени (табл. 1) оказывается в 3870 раз больше средней секунды. Поскольку такая единица времени по

Т а б л и ц а 1

Какая единица изменяется	Новые единицы массы, длины и времени, которые обеспечивают равенство единице постоянной тяготения		
	масса, <i>g</i>	длина, см	время, сек
Время	1	1	3870
Длина	1	$4056 \cdot 10^{-6}$	1
Масса	$1499 \cdot 10^4$	1	1

продолжительности близка к часу (3600 сек), то ее предлагалось называть *«естественным часом»*.

М. Планк [6] предложил выбрать абсолютную систему единиц длины, массы и времени таким образом, чтобы одновременно равнялись единице постоянная тяготения, скорость света и постоянная Планка. Оказалось, что для обеспечения равенства единице перечисленных фундаментальных постоянных нужно принять новые единицы измерения для массы ($5,456 \cdot 10^{-6}$ г), длины ($4,050 \cdot 10^{-33}$ см) и для времени ($1,351 \cdot 10^{-43}$ сек). Удобство введения таких абсолютных единиц измерения массы, длины, времени состоит в том, что упрощается написание основных уравнений. Сами же единицы становятся связанными с фундаментальными законами природы. Однако недостаточная точность определения физических постоянных из опыта, а также несоизмеримость в некоторых случаях новых единиц измерения массы, длины и времени с практически удобными единицами задерживает введение «абсолютных» единиц измерения. Уместно заметить, что постоянная тяготения f ныне не входит в систему фундаментальных постоянных физики.

§ 3. Геоцентрическая гравитационная постоянная

В последнее время в связи с запуском искусственных спутников Земли большое значение приобрела *геоцентрическая гравитационная постоянная*, которая равна произведению массы Земли $M_{\oplus}$ на кавендиша гравитационную постоянную f . Это произведение $fM_{\oplus}$ выражается в мет-

рической системе единиц. Геоцентрическая гравитационная постоянная может быть определена различными методами. Сначала изложим способ ее определения по гравиметрическим и геодезическим измерениям.

Пусть W означает потенциал силы тяжести, который складывается из потенциала притяжения Земли

$$U = f \iiint_{\Omega} \frac{dm}{r}$$

и потенциала центробежной силы, возникающей вследствие суточного вращения Земли

$$V = \frac{\omega^2 R^2}{2},$$

где Ω — объем Земли, dm — элемент массы Земли, r — расстояние от элемента массы Земли до рассматриваемой точки, R — расстояние этой точки от оси суточного вращения Земли, ω — угловая скорость вращения Земли.

Применяя формулу Остроградского — Грина к потенциалу силы тяжести W , имеем

$$\iiint_{\Omega} \Delta W d\Omega = \iint_S \frac{\partial W}{\partial n} dS, \quad (9)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей объем Земли Ω . Подставляем в левую часть равенства (9) потенциал силы тяжести, равный $W = U + V$. Потенциал притяжения U внутри притягивающих масс удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi f\sigma,$$

где σ — плотность.

Для потенциала центробежной силы справедливо соотношение $\Delta V = 2\omega^2$. Имея в виду, что

$$\iiint_{\Omega} \Delta W d\Omega = -4\pi fM_{\oplus} + 2\omega^2\Omega,$$

где $M_{\oplus}$ — масса Земли, можно написать следующее уравнение для геоцентрической гравитационной постоянной

$$fM_{\oplus} = \frac{\omega^2\Omega}{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial W}{\partial n} dS. \quad (10)$$

В правой части под знаком интеграла стоит производная потенциала силы тяжести W по нормали к поверхности S .

Если поверхность интегрирования — физическая поверхность Земли S , то необходимо иметь в каждой точке ее поверхности значение производной по нормали $\partial W / \partial n$. Однако сила тяжести, измеренная маятниковыми приборами и гравиметрами, направлена по нормали не к физической поверхности, а к уровенной поверхности потенциала ускорения силы тяжести Земли. Уровенные же поверхности для различных точек физической поверхности Земли, в которых производятся измерения силы тяжести, могут быть различными. Для интегрирования значений производных по нормали потенциала силы тяжести необходимо иметь их значения, приведенные к одной и той же уровенной поверхности.

Поскольку уровенные поверхности потенциала силы тяжести Земли близки к эллипсоиду (например, отклонение геоида от эллипсоида составляет около сотни метров), то с достаточной точностью можно при определении геоцентрической постоянной $fM_{\oplus}$ заменить неправильную уровенную поверхность эллипсоидом и производить интегрирование значений силы тяжести по его поверхности. Вместо фактических значений силы тяжести будем теперь использовать их значения, представляемые формулами нормального распределения силы тяжести по поверхности эллипсоидальной Земли.

Итак, примем Землю за эллипсоид вращения. Пусть (φ, λ) — геодезические координаты точек земной поверхности, e — эксцентриситет сечения Земли вдоль меридиана, a — большая полуось Земли. Прямоугольные координаты точек поверхности эллипсоида можно представить в виде

$$x = \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad y = \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$z = \frac{b \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Элемент поверхности эллипсоида вращения в переменных

φ , λ запишется так:

$$ds = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right] \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2\right]} d\varphi d\lambda = \\ = \frac{a^2 (1 - e^2) \cos \varphi d\varphi d\lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}. \quad (11)$$

На эллипсоиде вращения сила тяжести γ не зависит от долготы λ , а зависит только от широты φ . Согласно формуле Клеро

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \sin^2 2\varphi), \quad (12)$$

где γ_e , β_1 , β_2 — некоторые постоянные, определяемые из совокупности измеренных значений силы тяжести по всей земной поверхности.

Используя равенства (11) и (12) и подразумевая под поверхностью S поверхность эллипсоида, можно записать следующее выражение для интеграла в равенстве (10):

$$-\iint_S \frac{\partial W}{\partial n} ds = 2 \iint_{00}^{\frac{2\pi}{2}} \gamma_e (1 + \beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \sin^2 2\varphi) \frac{a^2 (1 - e^2) \cos \varphi d\varphi d\lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}.$$

Поскольку в подынтегральном выражении постоянные имеют следующий порядок: $e^2 \approx 0,007$, $\beta_1 \approx 0,005$, $\beta_2 \approx 0,000006$, то можно подынтегральную функцию разложить в ряд по степеням этих малых параметров. Ограничиваясь после интегрирования слагаемыми, порядок малости которых более 10^{-6} , будем иметь

$$-\iint_S \frac{\partial W}{\partial n} ds = 4\pi \gamma_e a^2 \left[1 + \frac{5\beta_1 - 5e^2 + 8\beta_2 - e^4 + e^2\beta_1}{15} \right]. \quad (13)$$

Подставляя найденное равенство (13) в уравнение (10), получим

$$fM_{\oplus} = \gamma_e a^2 \left[1 + \frac{5\beta_1 - 5e^2 + 8\beta_2 - e^4 + e^2\beta_1}{15} \right] + \frac{\omega^2 \Omega}{2\pi}.$$

Так как объем эллипсоида вращения $\Omega = \frac{4}{3} \pi a^3 \sqrt{1 - e^2}$, то окончательное равенство для определения $fM_{\oplus}$ переписывается так:

$$fM_{\oplus} = \gamma_e a^2 \left[1 + \frac{5\beta_1 - 5e^2 + 8\beta_2 - e^4 + e^2\beta_1}{15} \right] + \frac{2}{3} \omega^2 a^3 \sqrt{1 - e^2}.$$

Приведенные формулы получены в соответствии с работой А. Я. Орлова [21], с тем отличием, что нами учтены члены более высокого порядка малости.

Таким образом, для определения геоцентрической гравитационной постоянной $fM_{\oplus}$ по геодезическим и гравиметрическим измерениям из первых должна быть определена большая полуось a земного эллипсоида, а из вторых — значение экваториальной силы тяжести γ_e и коэффициенты формулы Клеро β_1 и β_2 . По совокупности же геодезических и гравиметрических данных определяется эксцентриситет e . Астрономические наблюдения позволяют измерить угловую скорость ω суточного вращения Земли ($\omega^2 = 0,5317494 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-2}$).

Выведем значение геоцентрической постоянной $fM_{\oplus}$, используя коэффициенты γ_e , β_1 , β_2 (12) из формулы нормального распределения силы тяжести, найденной У. Уотилой [101] в 1962 г. по аномалиям силы тяжести в свободном воздухе:

$$\gamma = 9,780478 (1 + 0,00529743 \sin^2 \varphi - 0,00000586 \sin^2 2\varphi).$$

Поскольку в этой формуле γ_e выражено в Потсдамской системе, то при выводе $fM_{\oplus}$ мы должны учесть ошибку γ_e , равную $-0,000128 \text{ м/сек}^2$. Принимая за размер большой полуоси Земли величину, выведенную И. Фишер [52], а затем подтвержденную другими авторами, $a = 6378166 \text{ м}$, получим следующее значение геоцентрической гравитационной постоянной

$$fM_{\oplus} = 398603,0 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Если использовать другую формулу Уотилы нормального распределения силы тяжести, выведенную по тем же гравиметрическим измерениям, но с использованием аномалий силы тяжести в изостатической редукции:

$$\gamma = 9,780451 (1 + 0,0053009 \sin^2 \varphi - 0,00000585 \sin^2 2\varphi),$$

получается незначительно отличающееся от предыдущего значение геоцентрической гравитационной постоянной

$$fM_{\oplus} = 398603,3 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Приведем еще одно значение геоцентрической гравитационной постоянной, выведенное на основе формулы

нормального распределения силы тяжести Н. П. Грушинского 1960 г. [8]:

$$\gamma = 9,780531 (1 + 0,0052883 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi).$$

Приняв названные выше значения большой полуоси и ошибку γ_e в Потсдамской системе, получим следующее значение геоцентрической гравитационной постоянной:

$$fM_{\oplus} = 398600,1 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Считая Землю трехосным эллипсоидом, аналогичные формулы для вычисления величины $fM_{\oplus}$ вывел М. Капуро [39]. После соответствующих расчетов он получил

$$fM_{\oplus} = (398602 \pm 3) 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Геоцентрическая гравитационная постоянная $fM_{\oplus}$ может быть определена по астрономическим наблюдениям движения Луны вокруг Земли. В качестве уравнения, ее задающего, берется уравнение третьего закона Кеплера. Запишем его в более точном виде, чем было это сделано в предыдущем параграфе, приняв во внимание массу Луны и постоянную часть возмущающего влияния Солнца на большую полуось лунной орбиты [43]:

$$fM_{\oplus} = \frac{n^2(1+l)A^3}{1 + \frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}}}. \quad (14)$$

В этой формуле n — угловая скорость среднего движения Луны ($n = 2,6616995 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$), которая определяется из астрономических наблюдений с высокой степенью точности, l — параметр, учитывающий постоянную часть возмущения Солнца на большую полуось лунной орбиты ($l = 0,00090768$), A — большая полуось лунной орбиты, $M_{\odot}/M_{\oplus}$ — отношение массы Луны к массе Земли.

Расстояние до Луны неоднократно находилось по измерениям лунного параллакса. Осуществленные в последние годы радиолокационные измерения [101] позволили уточнить расстояние от поверхности Земли до поверхности Луны. Величина скорости распространения электромагнитных волн предполагалась совпадающей с величиной скорости света в вакууме на Земле. Большая

полуось лунной орбиты из названных измерений оказалась равной $A = (384400,2 \pm 1,1)$ км. Основная неуверенность при определении величины A этим способом возникает вследствие плохого знания фигуры и размеров Луны. Величина радиуса Луны, обращенного к Земле, точно не известна и поэтому неуверенно получается расстояние между центрами тяжести Луны и Земли, входящее в уравнение (14). Кроме того, недостаточный учет влияния земной атмосферы и радиационных поясов Земли на скорость распространения света также вносит заметную ошибку в определение величины A .

Отношение $M_{\zeta}/M_{\oplus}$ долгое время в астрономии было известно с ошибкой порядка 10^{-3} ; сейчас оно достаточно точно определено по движению искусственных спутников и ракет, направленных к Луне. В табл. 2 приведена сводка последних определений $M_{\zeta}/M_{\oplus}$, выполненных в Калифорнийском технологическом институте.

Таблица 2

Наименование космических аппаратов	Значения $\frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}}$	Средняя квадратическая ошибка
«Маринер-2»	81,30155	$\pm 0,0034$
«Рейнджер-6»	81,30362	$\pm 0,0023$
«Рейнджер-7»	81,30439	$\pm 0,0028$
	среднее: 81,30319	

Используя приведенные выше величины n , l , $M_{\zeta}/M_{\oplus}$, A , получаем следующее значение геоцентрической гравитационной постоянной:

$$fM_{\oplus} = 398604,2 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Геоцентрическая гравитационная постоянная $fM_{\oplus}$ может быть выведена и по наблюдению движений искусственных спутников Земли в гравитационном поле Земли. Определение $fM_{\oplus}$ по движению ИСЗ содержит ряд отличий от аналогичных определений по движению Луны. Прежде всего, близость ИСЗ к Земле по сравнению с Луной приводит к тому, что Землю нельзя считать шаром с концент-

рическим распределением плотности, для которого была справедлива формула (14). Необходимо учитывать форму Земли и распределение масс внутри нее. Поэтому гравитационное поле реальной Земли приходится представлять в виде асимптотического разложения в ряд по сферическим функциям

$$W(\rho, \varphi, \lambda) = f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda}{\rho^{n+1}} P_n^m(\sin \varphi) + \frac{\omega^2 \rho^2}{3} (1 - P_2^0(\sin \varphi)), \quad (15)$$

где ρ, φ, λ — сферические координаты точки, в которой рассматривается гравитационный потенциал W (ρ — расстояние от центра тяжести Земли, φ — широта, а λ — долгота); $P_n^m(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра.

$$A_n^0 = f \iiint_{\Omega} \rho'^n P_n^0(\sin \varphi') dm,$$

$$A_n^m = f \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\Omega} \rho'^n P_n^m(\sin \varphi') \cos m\lambda' dm,$$

$$B_n^m = f \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\Omega} \rho'^n P_n^m(\sin \varphi') \sin m\lambda' dm;$$

A_n^0, A_n^m, B_n^m — стоксовы постоянные, зависящие от внутреннего распределения масс и формы Земли, dm — элемент массы. Интегрирование ведется по $\rho', \varphi', \lambda'$ — координатам текущей точки объема Земли.

Основным в разложении гравитационного потенциала (15) является первый член,

$$\frac{f A_0^0}{\rho} = \frac{1}{\rho} f \iiint_{\Omega} dm = \frac{f M_{\oplus}}{\rho},$$

содержащий в качестве стоксовой постоянной величину $f M_{\oplus}$; он соответствует гравитационному полю точечной массы M и определяет основной характер движения ИСЗ, близкий к кеплеровскому. Другие члены разложения потенциала создают возмущения кеплеровской орбиты.

Главное возмущение оказывает составляющая гравитационного поля Земли, обусловленная сжатием Земли. Из наблюдений движения ИСЗ наиболее уверенно определяются те стоксовы постоянные, которые соответствуют низким гармоникам разложения гравитационного поля. Так как $fM_{\oplus}$ — постоянная, соответствующая нулевой гармонике разложения, то она является наиболее надежно получаемой величиной.

Для определения геоцентрической гравитационной постоянной более желателен далекий ИСЗ, так как в этом случае уменьшается влияние на движение спутника неоднородностей гравитационного поля Земли, а также уменьшаются помехи, вызываемые сопротивлением атмосферы Земли.

В табл. 3 приведены значения геоцентрической гравитационной постоянной $fM_{\oplus}$, определенные по наблюдениям движений ИСЗ.

Таблица 3

Наименование космических аппаратов	Автор и год определения	Значение $fM_{\oplus}$ и средняя квадратическая ошибка, $10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2$
«Эхо-1» «Эхо-1», «Авангард», «Эксплорер» «Рейнджер-3»	Каула, 1963	$398603,7 \pm 1,2$
	Каула, 1963	$398601,6 \pm 0,8$
	Гамильтон, 1964	$398601,6 \pm 2,5$

Геоцентрическая гравитационная постоянная входит в число основных в системе астрономических постоянных. В новой системе, принятой в 1964 г. на XII Генеральной Ассамблее Международного Астрономического союза в Гамбурге [19], считается

$$fM_{\oplus} = 398603 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Это значение получено путем наилучшего согласования системы выбранных постоянных с известными законами и наблюдениями. Геоцентрическая гравитационная пос-

тоянная выводилась и в системе геодезических постоянных, в частности А. Куком [43] и В. Каулой [67].

Геоцентрическая гравитационная постоянная, так же как и гауссова постоянная, опирается на третий закон Кеплера. Однако в их выводах имеется различие не только в том, какое тело принято за центральное. Более существенно то, что при определении постоянной Гаусса измеряется только период обращения, а масса Солнца и расстояние между Солнцем и Землей полагаются равными единице. При выводе же геоцентрической гравитационной постоянной измеряется и период обращения, и расстояние до спутника Земли (Луны или ИСЗ), а к единице приравнивается только масса Земли. Для сравнения напомним, что кавендиша постоянная определяется путем измерения как времени и длины, так и массы.

§ 4. Масса и средняя плотность Земли

Исторически сложилось так, что ряд авторов ставили целью своих опытов только определение постоянной тяготения, другие свою задачу видели в определении средней плотности Земли. При этом у последних основное содержание опыта, так же как и у первых, состояло, по существу, тоже в определении постоянной тяготения. Некоторые из авторов, определявших среднюю плотность Земли, обработку наблюдений проводили иногда так, что у них отсутствовало в промежуточных вычислениях значение постоянной тяготения. В дальнейшем при описании и анализе опытов мы не будем делать различия между работами, посвященными определению постоянной тяготения или средней плотности Земли. Там, где на основании опытов получено значение постоянной тяготения и не приведено значение средней плотности Земли, мы вычислим ее. И, наоборот, там, где отсутствует значение постоянной тяготения, оно будет вычислено по значению средней плотности Земли.

Масса Земли $M_{\oplus}$ равна отношению геоцентрической гравитационной постоянной $fM_{\oplus}$ к кавендиша постоянной f . Величина массы Земли в граммах нужна при решении ряда геофизических и астрономических задач, например, при расчетах количества выпавшего на Землю метеоритного

вещества из космического пространства, количества воды в океанах, массы атмосферы. Большая точность необходима, например, при изучении общего распределения с глубиной плотности вещества внутри Земли.

Поскольку геоцентрическая гравитационная постоянная известна с относительной ошибкой порядка 10^{-5} , а кавендиша постоянная тяготения f — с ошибкой $5 \cdot 10^{-4}$, то точность знания массы Земли в метрической системе в основном лимитируется только точностью знания f .

Очевидно, что если известна масса Земли $M_{\oplus}$ и ее объем Ω , то легко может быть вычислена средняя плотность Земли. Считая Землю эллипсоидом вращения, можно получить следующее выражение для средней плотности Земли:

$$\sigma_{\oplus} = \frac{M_{\oplus}}{\Omega} = \frac{3\gamma_e}{4\pi a f} \left(1 + \frac{5e^2 + 10\beta_1 + \frac{17}{4}e^4 + 7e^2\beta_1 + 16\beta_2}{30} \right) + \frac{\omega^2}{2\pi f}. \quad (16)$$

Из всех величин, входящих в правую часть равенства (16), наименее надежно определяется постоянная тяготения f , которая поэтому лимитирует точность определения средней плотности Земли. Относительная точность определения средней плотности Земли такая же, как и ее массы — порядка $5 \cdot 10^{-4}$.

Итак, значение постоянной тяготения в метрической системе тесно связано со значением массы и средней плотности Земли. Для того чтобы определить массу $M_{\oplus}$, необходимо, кроме кавендиша гравитационной постоянной, дополнительно знать геоцентрическую гравитационную постоянную. Для определения средней плотности помимо этого требуется еще знать размеры и форму Земли.

§ 5. Определение средней плотности Земли путем сравнения притяжения больших природных масс с притяжением всей Земли

Во введении мы уже говорили, что в настоящей книге из всех видов постоянной тяготения мы детально будем интересоваться кавендиша гравитационной постоянной и связанными с ней значениями средней плотности и массы

Земли. Все способы измерения интересующих нас величин можно подразделить на две группы. В одной из них сравнивается притяжение всей Земли с притяжением масс, составляющих часть Земли (отдельный горный массив; слой массы, заключенный между двумя горизонтальными уровнями; масса воды в океане или в озере и т. д.). К другой группе относятся способы, в которых измеряется сила притяжения между относительно небольшими, специально изготовленными массами.

В настоящем параграфе мы рассмотрим первую группу способов определения постоянной тяготения, массы и средней плотности Земли. В надежде на получение больших эффектов притяжения в них использовались большие массы. Притягиваемая масса в таких опытах определялась по ее геометрическим размерам и плотности, а сила притяжения этой массы получалась сопоставлением ее с силой тяжести. Это сопоставление осуществлялось в одних опытах путем вывода из отклонений отвеса отношения горизонтальной компоненты силы притяжения (например, горного массива) к силе тяжести Земли в данном месте (рис. 2).

В других опытах измерялась не горизонтальная, а вертикальная компонента притяжения горного массива. При этом определялась разность силы тяжести на вершине одиноко расположенной горы и у ее подошвы. Зная взаимное расположение притягивающей массы горы и точки наблюдения, можно было вычислить силу притяжения в точке наблюдения, а затем среднюю плотность Земли, ее массу и постоянную тяготения. Для этих же целей использовались измерения разности силы тяжести на земной поверхности и на некоторой глубине в шахте. Измерялось также притяжение массы воды, заполнявшей некоторый водоем.

Мы не будем заниматься описанием способов первой группы по определению средней плотности Земли, так как они представляют только исторический интерес. Приведем и прокомментируем только сводку значений средней плотности Земли $\sigma_{\oplus}$ (табл. 4), полученных различными авторами путем сравнения притяжения больших природных масс, составляющих часть Земли, с притяжением всей Земли.

Таблица начинается со значения средней плотности Земли, принадлежащего Ньютону, который не проводил специальных опытов по измерению массы и средней плотности Земли, а также постоянной тяготения. Он с удивительной прозорливостью оценил среднюю плотность

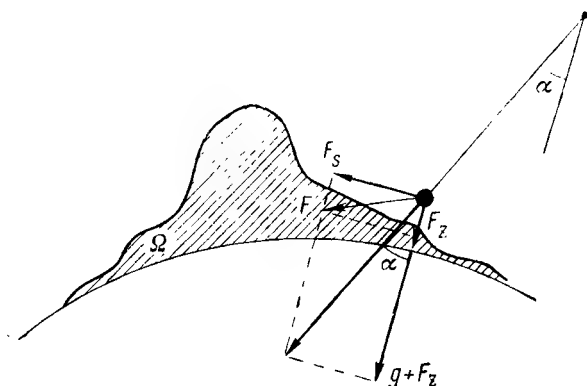


Рис. 2. Схема уклонения отвеса вблизи горного массива Ω . Угол уклонения отвеса $\alpha = \arctg \frac{F_s}{g + F_z}$, g —сила тяжести, F_s и F_z —горизонтальная и вертикальная составляющие притяжения горного массива.

Земли, основываясь на фактических данных о плотности пород поверхностных слоев Земли. В третьей книге «Начал» [20] Ньютон пишет: «Так как обыкновенные верхние части Земли примерно вдвое плотнее воды, немного же ниже, в рудниках, оказываются примерно втрое, вчетверо и даже в пять раз более тяжелыми, правдоподобно, что все количество вещества Земли в пять или шесть раз более того, как если бы оно все состояло из воды». Приходится только поражаться гениальной интуиции Ньютона, как он, располагая единственными фактическими данными о плотности пород в однокилометровой поверхностной толще Земли, так точно мог предсказать среднюю

Т а б л и ц а 4

Автор и ссылка на его работу	Год опубликования результата	Метод определения средней плотности Земли и место проведения опытов	Средняя плотность Земли, г/см ³
Ньютон [20]	1687	Оценка на основании знания плотности пород в верхних частях земной коры	5—6
Бугер [31]	1749	<i>По измерениям уклонов отвеса</i> Вблизи горного массива Чимборасо в Перу	13
Хаттон [60]	1778	Вблизи горного массива Шихаллен в Англии	4,5
Плейфэр [79]	1811	Вблизи горного массива Шихаллен в Англии	4,71
Хаттон [61]	1821	Вблизи горного массива Шихаллен в Англии	4,95
Джемс [63]	1856	Вблизи холма Артур Сит на окраине Эдинбурга в Шотландии	5,14
Джемс [62]	1856	Вблизи холма Артур Сит на окраине Эдинбурга в Шотландии <i>По измерениям силы тяжести на различных уровнях земной поверхности</i>	5,32
Карлини [40]	1824	Вблизи горного массива Мон Сенис в Италии	4,39
Сабин [41]	1827	Вблизи горного массива Мон Сенис в Италии	4,77
Джулио [54]	1841	Вблизи горного массива Мон Сенис в Италии	4,95
Манденхалл [77]	1881	Вблизи горного массива Фудзияма в Японии <i>По измерениям силы тяжести на различных уровнях в шахтах</i>	5,77
Эри [25]	1856	В шахте Хартон Пит в Англии	6,57
Эри [26]	1856	В шахте Хартон Пит в Англии	6,62
Штернек [95]	1882	В руднике Адалберт в Чехословакии	5,64
Штернек [96]	1883	В руднике Адалберт в Чехословакии	5,77
Штернек [97]	1885	В руднике Абрагам в Германии	6,77
Берже [30]	1893	<i>По измерениям притяжения массы воды в озере Хабай-ля-Новое в Люксембурге</i>	5,41

плотность всей Земли. Таким образом, на основании предположения о средней плотности Земли и имеющихся данных о размерах Земли и силе тяжести на ней, Ньютон мог иметь представление о массе Земли и постоянной тяготения (в смысле кавендиша) с точностью порядка 10%.

Но величина средней плотности Земли, установленная априорно, не могла удовлетворить Ньютона. Он всегда стремился свои выводы проверить практикой, наблюдениями. Поэтому Ньютон рекомендовал определить массу и среднюю плотность Земли путем измерения отклонения отвеса вблизи горного массива. Он провел расчеты угла отклонения отвеса вблизи некоторой гипотетической однородной горы, с высотой в три мили и шириной в шесть миль, показавшие, что этот угол должен достигать величины 2'. Это был бы смелый эксперимент, тем более, что наблюдательная астрономия того времени уже могла регистрировать угловые секунды. Поэтому ожидаемые отклонения под действием притяжения массы даже небольшого горного массива могли быть легко обнаружены из астрономических наблюдений.

Первый опыт определения средней плотности Земли этим способом был осуществлен П. Бугером*) (1698—1758) во время знаменитой Перуанской экспедиции французской Академии наук в середине XVIII в.

Однако опыт оказался неудачным, так как астрономические наблюдения вблизи горного массива Чимборасо пришлось проводить в исключительно трудных климатических условиях. Вскоре аналогичные работы были повторены в Англии вблизи горы Шихаллиен. Астрономические наблюдения проводил королевский астроном Н. Маскелайн, прекрасный наблюдатель. Однако сам он средней плотности и массы Земли не вывел, — сделали это его соотечественники Ч. Хаттон, а несколько позже И. Плейфэр. Еще одна попытка определить среднюю плотность Земли по отклонению отвеса вблизи холма Артур Сит была предпринята в Шотландии Р. Джемсом.

Одновременно с выводом средней плотности Земли по отклонению отвеса проводились ее определения по изме-

*) Старая русская транскрипция фамилии Bouguer (Бугер), употребляемая в оптике, фонетически более правильна, чем «Буге», так как он был выходцем из Бретани.

рению силы тяжести на различных уровнях склона горного массива (Бугер в Перу, Ф. Карлини, Э. Сабин, К. Джулио в Италии, Т. Манденхалл в Японии). С середины и до конца XIX в., начиная с Д. Эри (впоследствии ставшего королевским астрономом), предпринимались попытки получения средней плотности Земли по измерению силы тяжести на различных уровнях в шахтах и рудниках. Особой тщательностью выделяются работы австрийского геодезиста Р. Штернека по измерению силы притяжения слоя масс, заключенного между некоторыми уровнями в шахте.

Заканчивается табл. 4 результатами интересных опытов А. Берже [30] с использованием большой водной массы в 320 000 т, распределенной на площади 32 га. Измерялось притяжение водной массы, заполнявшей водоем, и после того как уровень его понизился на 1 м. Поскольку понижение уровня было очень кратковременным, то при измерении разности притяжений можно было избежать многих помех, влияющих на показания гравиметрических приборов. Примененный Берже гравиметр состоял из U-образной трубки, в которой с одной стороны столбик ртути уравнивался некоторым объемом воды. Изменение уровня ртути с другой стороны трубки регистрировалось интерференционным способом по методу Физо. В результате измерений Берже получил массу Земли равной $M_{\oplus} = 5,85 \cdot 10^{27}$ г, а постоянную тяготения равной $f = 6,80 \cdot 10^{-11}$ м³/кг·сек².

Мысли о наблюдении притяжения больших водных масс высказывал также Этвеш. В работе [50] он проводит оценку величины градиента притяжения на берегу моря, озера или реки при изменении уровня воды в этих водоемах.

В табл. 4 значения $\sigma_{\oplus}$ заметно отличаются друг от друга. Эти отличия вызваны существенным недостатком, присущим всем таким способам получения средней плотности Земли, заключающимся в неточности установления массы части Земли, притяжение которой определяется. Это происходит потому, что плотность сильно изменяется в пределах одного и того же горного массива или притягивающего слоя. Получить образцы, представляющие с достаточной точностью распределение плотности по всему

объему притягивающей массы, оказывается практически невозможным. В этом отношении исключение представляет опыт Берже с массой воды в озере.

В опытах же по определению средней плотности Земли по измерениям уклонения отвеса или силы тяжести вблизи одиноко расположенного горного массива неопределенность притягивающих масс дополнительно усугубляется существованием изостатической компенсации земной коры. Нельзя находить силу притяжения горного массива, как это делали авторы всех подобных опытов, исходя только из его внешних размеров. В целом, внешняя недостача масс на земной поверхности (море, низменность и т. д.) компенсируется избытком масс под ней, и наоборот, избытку масс на земной поверхности (горы, возвышенности и пр.) соответствует недостача их под ней. Изостазия проявляется в региональном масштабе, т. е. изостатически компенсированными оказываются массы, распространенные на сравнительно большие площади. В относительно небольших районах внешние массы не всегда полностью компенсированы. Поэтому, вообще говоря, можно было бы ожидать сравнительно лучших результатов определений массы и средней плотности Земли по измерению уклонений отвеса и силы тяжести вблизи небольших гор. Вследствие изостатической компенсации средняя плотность Земли должна получаться больше, чем в действительности.

Дефектом же способов определения средней плотности Земли по измерениям силы тяжести в шахтах является трудность учета гравитационного поля аномальных подземных масс, накладывающегося на поле притяжения плоского слоя. Впрочем, этот дефект имеется и в способах, основанных на измерениях уклонения отвеса и силы тяжести на земной поверхности вблизи горного массива.

Из приведенных в табл. 4 определений, исключая результаты Бугера, можно получить среднее значение плотности Земли $\sigma_{\oplus}$. Строго говоря, следовало бы придать каждому значению $\sigma_{\oplus}$ определенный вес, который бы учитывал точность каждого определения, тем более, что поздние определения средней плотности Земли основаны на более точных инструментальных измерениях силы тя-

жести. Веса должны были бы также учитывать и то, что ряды приведенных значений $\sigma_{\oplus}$ некоторым образом связаны между собой. Так, оба результата Хаттона и определения Плейфэра основываются на одном и том же измерении отклонения отвеса вблизи горного массива. Средняя плотность Земли, выведенная Карлини, Сабиним, Джулио, основывается на различных измерениях силы тяжести, но вблизи одних и тех же притягивающих масс.

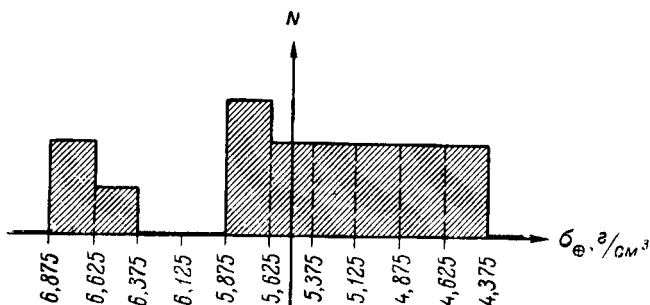


Рис. 3. Гистограмма распределения значений средней плотности Земли, найденных путем сравнения притяжения больших природных масс с притяжением всей Земли.

$\sigma_{\oplus}$ — средняя плотность Земли, N — отношение числа значений $\sigma_{\oplus}$, заключенных в указанном интервале, ко всему числу значений $\sigma_{\oplus}$.

Однако мы решили не учитывать всего этого, так как самое главное обстоятельство, определяющее вес результатов — точность определения притягивающей массы, — не могло быть установлено. Итак, если все приведенные значения средней плотности Земли имеют одинаковый вес, то получается среднее значение плотности Земли

$$\sigma_{\oplus} = 5,4 \text{ г/см}^3.$$

Гистограмма (рис. 3) распределения значений средней плотности Земли, приведенных в табл. 4, показывает, что измеренные значения $\sigma_{\oplus}$ не подчиняются закону нормального распределения. Поэтому близость полученного среднего значения $\sigma_{\oplus}$ к современному в значительной степени случайна.

После тщательных исследований средней плотности Земли по измерениям силы тяжести, выполненным Манденхаллом и Штернеком, а также по измерениям Дж. Эвереста (1790—1866) отклонения отвеса вблизи Гималайского хребта, после теоретического анализа, проведенного Д. Праттом (1809—1871) и Эри (1801—1892), сложилось определенное мнение, что измерить среднюю плотность Земли с достаточной точностью описанными выше способами нельзя. Причина тому — упомянутая выше неопределенность притягивающих масс. Поэтому все эти способы определения массы средней плотности Земли и постоянной тяготения представляют в настоящее время только исторический интерес.

Определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов

§ 6. Идея и основы теории способа определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов

Мысль использовать для определения массы и средней плотности Земли тела, масса которых могла бы быть взвешена в лабораторных условиях с высокой точностью, возникла еще во времена формирования закона тяготения. Однако после открытия закона долго держалось представление о том, что сила взаимного притяжения между небольшими земными телами крайне мала и вряд ли может быть измерена. Дело в том, что Ньютон, рассчитывая величину силы взаимного притяжения двух небольших равных шаровых масс, допустил ошибку. По его расчетам два шара, диаметр которых 30 см, а плотность равна средней плотности Земли, будучи расположены на расстоянии 0,6 см друг от друга, в предположении отсутствия внешнего сопротивления, сойдутся под действием взаимного притяжения через месяц после начала движения. На основании этого ошибочного расчета Ньютон высказал сомнение в возможности наблюдения притяжения между небольшими земными массами. В действительности же для схождения шаров требуется совсем небольшое время — всего 320 секунд. Поскольку авторитет Ньютона как ученого был очень велик, то это не могло не сдерживать осуществления первой попытки опытного измерения силы взаимного притяжения между двумя небольшими земными телами. Первым ученым, попытавшимся измерить взаимное притяжение земных масс, был Кавендиш. В дальнейшем мы подробно расскажем как о первых опытах Кавендиша с вертикальными крутильными весами, так и о других аналогичных опытах.

В настоящем параграфе изложим вкратце идею определения постоянной тяготения с помощью вертикальных крутильных весов и приведем основы теории способа.

Вертикальные крутильные весы устроены следующим образом. На тонкой упругой нити подвешивается за середину коромысло, на концах которого укрепляются равные массы. Эти массы вместе с коромыслом и нитью составляют так называемую крутильную систему. Кроме масс крутильной системы, вблизи нее располагаются большие массы. В дальнейшем, хотя в действительности происходит взаимное притяжение масс, мы будем условно называть массы крутильной системы — *притягиваемыми массами*, а большие неподвижные массы *притягивающими*. Притягиваемые массы вместе с коромыслом совершают относительно притягивающих крутильные колебания, а после затухания этих колебаний приходят в положение равновесия, которое отличается от исходного. Величина отклонения и период крутильных колебаний зависят от упругих свойств нити, которая характеризуется так называемой *упругой постоянной нити*, обозначаемой в дальнейшем τ . Постоянная τ может быть вычислена по формуле

$$\tau = \frac{\pi G d^4}{32l}, \quad (17)$$

где G — модуль сдвига материала нити, l — ее длина, d — диаметр.

Чтобы увеличить чувствительность крутильных весов, необходимо уменьшить величину постоянной τ . Как показывает формула (17), постоянная τ быстро убывает с уменьшением диаметра нити. Однако уменьшение толщины нити, на которой висит коромысло с притягиваемыми массами, ограничено ее прочностью на разрыв. Уменьшение же веса притягиваемых масс крутильной системы невыгодно, ибо уменьшает силу взаимного притяжения между взаимодействующими массами.

Если к притягиваемым массам поднести сбоку притягивающие, то под действием притяжения коромысло весов повернется на некоторый угол ϕ . Вместе с коромыслом на угол ϕ закрутится и нижний конец нити. Величина этого угла закручивания зависит от постоянной τ и момента

$\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ силы взаимного притяжения притягивающихся масс в плоскости колебаний крутильной системы. Крутильная система, выведенная из положения равновесия относительно оси нити и предоставленная самой себе, будет совершать крутильные колебания относительно этой оси, период которых также зависит от τ и $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$.

Запишем дифференциальное уравнение крутильных колебаний крутильной системы

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi) + \mathfrak{M}_{\text{пр}}^0(\varphi) + \mathfrak{M}_{\tau}(\varphi) = 0, \quad (18)$$

где J — момент инерции крутильной системы относительно оси нити, $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi)$ — момент сил притяжения между массами крутильной системы и притягивающими массами, $\mathfrak{M}_{\text{пр}}^0(\varphi)$ — момент сил притяжения между массами крутильной системы и окружающими прибор массами (стенами, столбами и т. д.). Положение этих притягивающих масс в процессе опыта считается неизменным.

Постоянная тяготения f входит множителем в выражения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi)$ и $\mathfrak{M}_{\text{пр}}^0(\varphi)$. Конкретный вид функций $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi)$ и $\mathfrak{M}_{\text{пр}}^0(\varphi)$ зависит от параметров, характеризующих форму и положение взаимодействующих масс, которые предполагаются известными. В предположении, что при закручивании нити выполняется закон Гука, момент упругих сил закрученной нити равен

$$\mathfrak{M}_{\tau}(\varphi) = \tau(\varphi - \varphi_0),$$

где $(\varphi - \varphi_0)$ — угол отклонения коромысла относительно равновесного положения. При произвольной форме и плотности взаимодействующих масс моменты $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi)$ и $\mathfrak{M}_{\text{пр}}^0(\varphi)$ являются нелинейной функцией угла φ . Поэтому колебания крутильной системы описываются нелинейным дифференциальным уравнением. Впрочем, уравнение оставалось бы нелинейным и в случае взаимодействия точечных масс. Для понимания идеи способа определения постоянной тяготения с помощью вертикальных крутильных весов мы изложим упрощенную теорию, основывающуюся на линейном дифференциальном уравнении. Точная теория рассмотрена в последней главе.

Представим момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi)$ в виде разложения в ряд по степеням угла φ :

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi) = \mathfrak{M}_{\text{пр}}(0) + \varphi \mathfrak{M}'_{\text{пр}}(0) + \frac{\varphi^2}{2!} \mathfrak{M}''_{\text{пр}}(0) + \dots$$

Аналогично можно представить и $\mathfrak{M}_{\text{пр}}^0(\varphi)$. Ограничившись первыми двумя членами разложения, перепишем уравнение (18) в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n^2\varphi + C = 0, \quad (19)$$

где

$$n^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\mathfrak{M}'_{\text{пр}}(0) + \mathfrak{M}_{\text{пр}}^{0'}(0) + \tau}{J}, \quad (20)$$

$$C = \frac{\mathfrak{M}_{\text{пр}}(0) + \mathfrak{M}_{\text{пр}}^0(0) - \tau\varphi_0}{J}. \quad (21)$$

Здесь n обозначает частоту, а T — период собственных крутильных колебаний. Решение уравнения (19) состоит из двух частей, постоянной и периодической, описывающей изменение угла φ в функции времени t :

$$\varphi = -\frac{C}{n^2} + C_1 \sin nt + C_2 \cos nt,$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Постоянная тяготения может быть определена как из постоянной части решения

$$\varphi_1 = -\frac{C}{n^2},$$

так и из переменной

$$\varphi_2 = C_1 \sin nt + C_2 \cos nt.$$

При использовании постоянной части решения φ_1 метод определения постоянной тяготения будем называть *статическим*, а в случае использования переменной φ_2 — *динамическим*.

Оба эти способа применялись на практике.

При статическом способе измеряют величину угла φ_1 , на который отклоняется крутильная система от равнове-

ного положения под действием сил притяжения. Обычно добиваются двойного угла отклонения крутильной системы, помещая притягивающие массы сначала с одной стороны притягиваемых масс, а затем с другой. Этим исключается $\mathfrak{M}_{\text{пр}}^0(0)$ — момент сил, обусловленный притяжением внешних масс (стен, столбов и пр.), положение которых в процессе опыта можно считать неизменным. Исчезнет также в этом случае другая постоянная $t\varphi_0$, входящая в правую часть выражения для C (21). Обозначив разность углов отклонения коромысла весов при положении притягивающих масс с одной и другой стороны коромысла через $\Delta\varphi$, а моменты сил притяжения соответственно по $\mathfrak{M}_{\text{пр}}^I(0)$ и $\mathfrak{M}_{\text{пр}}^{II}(0)$, получим

$$Jn^2\Delta\varphi = \mathfrak{M}_{\text{пр}}^I(0) + \mathfrak{M}_{\text{пр}}^{II}(0).$$

Отсюда, имея в виду, что

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}^I(0) = f \bar{\mathfrak{M}}_{\text{пр}}^I(0) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_{\text{пр}}^{II}(0) = f \bar{\mathfrak{M}}_{\text{пр}}^{II}(0),$$

определяют постоянную тяготения

$$f = \frac{Jn^2\Delta\varphi}{\mathfrak{M}_{\text{пр}}^I(0) + \mathfrak{M}_{\text{пр}}^{II}(0)}. \quad (22)$$

Момент инерции J находят по геометрическим размерам и плотности масс крутильной системы, $\bar{\mathfrak{M}}_{\text{пр}}^I(0)$ и $\bar{\mathfrak{M}}_{\text{пр}}^{II}(0)$ вычисляется по геометрическим размерам, относительному положению крутильной системы и притягивающих масс и их плотности. Угол $\Delta\varphi$ измеряется в процессе наблюдений, из наблюдений же определяется и частота n крутильных колебаний коромысла с притягиваемыми массами. Последняя используется для вычисления упругой постоянной нити, которую нельзя надежно вычислить по формуле (17).

В случае динамического метода определения постоянной тяготения из опыта находится частота n крутильных колебаний при двух различных положениях притягивающих масс. Пусть частота, соответствующая одному положению притягивающих масс, есть n_1 , а другому — n_2 , а значения градиента моментов силы притяжения этих

масс соответственно есть $(\mathfrak{M}'_{\text{пр}}(0))^{\text{I}}$ и $(\mathfrak{M}'_{\text{пр}}(0))^{\text{II}}$. Используя равенство (22), запишем разность квадратов частот n_1 и n_2

$$J(n_1^2 - n_2^2) = (\mathfrak{M}'_{\text{пр}}(0))^{\text{I}} - (\mathfrak{M}'_{\text{пр}}(0))^{\text{II}}.$$

В правой части последнего равенства отсутствует разность градиентов момента силы притяжения масс стержней и т. д. и постоянная τ , так как предполагается, что в процессе опыта эти массы и τ остаются неизменными.

Постоянная тяготения определится по формуле

$$f = \frac{J(n_1^2 - n_2^2)}{(\overline{\mathfrak{M}}'_{\text{пр}}(0))^{\text{I}} - (\overline{\mathfrak{M}}'_{\text{пр}}(0))^{\text{II}}},$$

где $(\overline{\mathfrak{M}}'_{\text{пр}}(0))^{\text{I}}$ и $(\overline{\mathfrak{M}}'_{\text{пр}}(0))^{\text{II}}$ с точностью до множителя f есть значения градиента момента силы притяжения между массами крутильной системы и притягивающими массами в двух различных положениях последних относительно крутильной системы. Значения названных градиентов вычисляются по известным геометрическим размерам, плотностям и взаимному расположению притягивающихся масс. Из наблюдений для выявления частот n_1 и n_2 определяются периоды колебаний крутильной системы, соответствующие двум различным положениям притягивающихся масс.

§ 7. Опыты Кавендиша — первые измерения силы взаимного притяжения между небольшими массами

Вертикальные крутильные весы для измерения взаимного притяжения небольших масс были предложены в конце восьмидесятых годов XVIII в. соотечественником Ньютона Д. Мичелом *) (1724—1793). Он не только высказал идею, но и создал такие весы для определения массы и средней плотности Земли. Однако смерть прервала

*) Мичел, по свидетельству Бейли [29], утверждал, что свой прибор он изобрел раньше, чем был опубликован эксперимент Кулона с аналогичной аппаратурой.

эту работу. Вся аппаратура Мичела перешла к Г. Кавендишу (1731—1810), известному английскому химику и физику, который и осуществил в 1797—1798 гг. опыт по определению массы и средней плотности Земли с помощью крутильных весов [42].

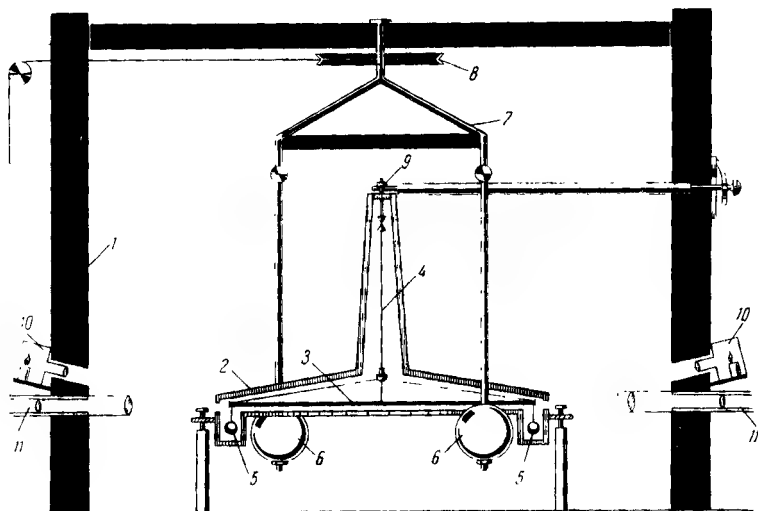


Рис. 4. Схема прибора Мичела—Кавендиша.

1 — деревянный кожух прибора, 2 — защитный кожух крутильной системы; 3 — деревянное коромысло, 4 — нить крутильной системы, 5 — притягиваемые массы, 6 — притягивающие свинцовые массы, 7 — подвес притягивающих масс, 8 — блок для перемещения притягивающих масс, 9 — устройство для регулировки крутильной системы по азимуту, 10 — лампы для освещения, 11 — визиры для наблюдения крутильной системы.

Прибор Мичела — Кавендиша (рис. 4) состоял из деревянного коромысла, подвешенного за середину на тонкой проволоке длиной около одного метра. К концам коромысла на тонкой проволоке подвешивались свинцовые шары, весившие по 730 г. Две другие массы по 158 кг, тоже шаровой формы, располагались в одной горизонтальной плоскости с первыми. Подвес этих масс предусматривал возможность их перемещения. Кавендиш провел две серии опытов с различными по жесткости крутильными нитями. Упругие свойства нитей были

таковы, что период собственных колебаний одной был порядка 427 секунд, а другой — в два раза больше. Предвидя возможность влияния на результаты опытов изменений температуры, что могло бы привести к изменению упругой постоянной нити, изменению линейных размеров притягивающихся масс и расстояний между ними, к возникновению конвективных потоков воздуха, прибор разместили в изолированном помещении. Наблюдения за отклонениями крутильной системы производились с помощью оптической трубы, а перемещение масс осуществлялось с помощью простого дистанционного устройства. Кавендиш обнаружил, что положение крутильной системы изменялось при длительном пребывании больших масс вблизи малых масс, так что создавалось впечатление изменения притяжения во времени. Из серии опытов он установил, что причиной этого являются конвективные потоки воздуха. Кавендиш намеревался в последующих опытах принять меры к уменьшению их влияния.

Относительная точность линейных измерений в опыте Кавендиша составляла величину порядка 10^{-3} . Такова же была и точность взвешиваний. При расчетах не учитывались нелинейность упругих сил закрученной нити, притяжения самого коромысла весов и притягиваемой массы на другом конце коромысла и другие влияния.

Кавендиш в своей работе [42] привел значение средней плотности Земли, равное $5,48 \text{ г/см}^3$. Но при выводе среднего значения он допустил арифметическую ошибку, на которую указал Бейли [29]. После ее исправления на основании данных Кавендиша было получено значение $\sigma_{\oplus} = 5,45 \pm 0,04 \text{ г/см}^3$. Кавендиш был замечательным экспериментатором, — более полутора столетий назад он получил значение средней плотности Земли, которое отличается от современного значения лишь на несколько сотых долей единицы г/см^3 . Даже позже некоторые авторы получали из своих опытов худшие результаты.

Эксперимент Кавендиша не только позволил вывести среднее значение плотности Земли, но и доказал опытным путем справедливость закона тяготения Ньютона для небольших тел и расстояний. Кавендиш специально ставил ряд опытов для выяснения различия между законами притяжения для малых и больших расстояний и пришел

к выводу, что с точностью его опытов (порядка 10^{-2}) такого различия не существует.

В 1821 г. Хаттон, который 43 годами ранее вычислил среднюю плотность Земли по наблюдениям отклонения отвеса в Шотландии возле горного хребта Шихаллиен, вновь обращается к проблеме определения средней плотности Земли [61]. Хаттон критикует эксперименты Кавендиша, приводит список его ошибок. Однако Хаттон не понял работы своего соотечественника и к тому же и сам допустил ряд ошибок. Создается впечатление, что он задался целью опорочить конкурирующий метод крутильных колебаний и старался подтянуть результаты Кавендиша к результатам, полученным им самим.

В заключение настоящего параграфа следует подчеркнуть, что интерес Кавендиша к определению массы и средней плотности Земли не ограничивался только что описанным опытом, как обычно представляется в литературе. Он еще за четверть века до своих опытов с крутильными весами производил расчеты средней плотности Земли по измерению притяжения массы воды морских приливов, подыскивал вместе с Маскелайном горный массив в Англии, вблизи которого по отклонению отвеса предполагалось найти величину средней плотности Земли. Таким образом, интерес Кавендиша к измерению средней плотности Земли был длительным, разносторонним и глубоким. Не случайно поэтому, что после смерти Мичела аппаратура последнего попала к Кавендишу, который смог провести ряд замечательных опытов. Ему по праву принадлежит заслуга первого определения постоянной тяготения, массы и средней плотности Земли из лабораторных опытов.

§ 8. Работы Райха по измерению массы и средней плотности Земли

После Кавендиша крутильные весы неоднократно использовались для определения средней плотности Земли и постоянной тяготения. В 1838 г. профессор Горной академии во Фрейбурге Ф. Райх (1799—1882) опубликовал свои первые значения средней плотности Земли,

найденные с помощью прибора, аналогичного прибору Мичела — Кавендиша [85].

Прибор Райха имел коромысло длиной около 2 м, которое на тонкой проволоке подвешивалось к потолку подвала. На концах коромысла были расположены шаровые массы по 484 г каждая. Период свободных крутильных колебаний коромысла с этими массами составлял около 400^с. Две притягивающие массы весили по 45 кг. Они подвешивались на проволоке, верхний конец которой крепился к ролику, катающемуся по рельсу, что позволяло быстро перемещать притягивающие массы из одного положения в другое. Наблюдения за отклонением коромысла производились из соседней комнаты через отверстие в двери. В телескоп отсчитывались деления шкалы, отраженные от зеркала, укрепленного на коромысле крутильной системы. Для измерения расстояний использовался горизонтальный катетометр.

Важным новшеством Райха было использование в качестве притягивающих масс 45-килограммовых свинцовых шаров в одних опытах и 30-килограммовых чугунных шаров — в других. Это обстоятельство важно для экспериментальной проверки утверждения Ньютона, что сила притяжения между телами зависит только от массы этих тел, а не от их состава.

В результате 57 наблюдений, продолжавшихся в течение 40 дней, Райх нашел среднюю плотность Земли 5,44 г/см³. После переработки тех же измерений с использованием методики Бейля для учета изменения равновесного положения коромысла он получает в работе, опубликованной уже в 1852 г. [86], новое значение средней плотности Земли, которое было на 0,5 г/см³ больше ранее выведенного. Используя чугунные шары вместо свинцовых, Райх получил значение средней плотности Земли 5,43 г/см³.

Через 10 лет Райх [86] возобновил свои эксперименты, модернизировав аппаратуру. В новом приборе использовались нити из проволоки диаметром 0,5 мм и длиной 2270 мм, а затем — диаметром 0,4 мм и длиной 620 мм. Период колебаний крутильной системы для этих нитей был соответственно около 700^с и 500^с. Кроме того, Райх попробовал осуществить бифилярный подвес коромысла

с грузами. Период колебаний этой системы был около $800''$. Притягивающие массы Райх устанавливал на этот раз на вращающийся диск для удобства их перемещения. В результате опытов Райх получил следующие три значения средней плотности Земли, соответствующие трем упомянутым подвесам крутильной системы: $5,57$, $5,62$, $5,59 \text{ г/см}^3$.

Ряд экспериментов он осуществил с целью выявления влияния магнитного поля на результаты измерений. Для этого Райх провел серию опытов с притягиваемыми массами, изготовленными из цинка, висмута и железа. Все они имели одинаковый вес по 484 г . Используя покрытие корпуса прибора фольгой, он рассчитывал помимо гидроизоляции прибора устранить влияние электростатических зарядов. В пределах точности измерений никакого различия в средней плотности Земли обнаружено не было.

В экспериментах Райха 1847 — 1850 гг. интересна первая попытка определить притяжение между массами коромысла и притягивающими массами по периоду крутильных колебаний, без измерения угла статического отклонения крутильной системы. Из этих измерений Райх вывел значение средней плотности Земли $\sigma_{\oplus} = 6,25 \text{ г/см}^3$, существенно отличающееся от полученных по углу статического отклонения коромысла и менее близкое к современному значению средней плотности Земли.

Эту методику Райха следует считать новой. Кавендиш хотя и определял период крутильных колебаний системы, но это ему было необходимо только для определения упругой постоянной нити τ , как вспомогательной величины при измерении угла статического отклонения крутильной системы. Сто лет спустя после первой работы Райха динамический метод становится основным методом в опытах по определению постоянной тяготения.

§ 9. Определения Бейли средней плотности Земли

В то время как Райх ставил свои эксперименты в Германии, в Англии, на родине Кавендиша, Королевское Астрономическое общество вновь стимулирует работы по новому определению средней плотности Земли и постоянной тяготения. В 1843 г. Ф. Бейли (1774 — 1844) подводит итоги своих многолетних опытов с крутильными весами [29].

Прибор Бейли немногим отличался от крутильных весов Мичела — Кавендиша. Шарообразные притягиваемые массы в приборе крепились непосредственно на концах коромысла, имевшего длину 196 см. Бейли сильно разнообразил притягиваемые массы на коромысле, используя свинец, цинк, стекло, платину, латунь, слоновую кость или просто тяжелое коромысло без всяких дополнительных масс на концах. Веса притягиваемых масс изменялись в пределах от 116 г до 1538 г. Бейли варьировал и подвес коромысла крутильной системы, используя для этого одиночные нити из медной проволоки толщиной 0,4 и 0,5 мм, а также бифилярные подвесы из шелка, латуни, железа с расстояниями между нитями от 4 до 10 мм. Нить крутильной системы в приборе Бейли имела длину около полутора метров. Период свободных колебаний крутильной системы составлял в зависимости от подвеса и притягиваемых масс от $98^{\circ},5$ до 550° . Сравнительно малые периоды свободных колебаний указывают на относительно малую чувствительность прибора.

Притягивающие массы в форме шара отливались из свинца и имели вес по 172,4 кг каждый. Они устанавливались на концах подвижной балки, ось вращения которой совпадала с осью нити. Перемещение притягивающих масс осуществлялось дистанционно поворотом балки, на концах которой и были установлены эти массы. Раскачивание крутильной системы производилось приближением больших масс, то справа, то слева от масс коромысла, в такт колебаниям крутильной системы. Регистрация положения крутильной системы осуществлялась визуально с помощью зеркала на середине коромысла, телескопа, и шкалы с делениями, т. е. так же, как и в опытах Райха.

Для уменьшения влияния температурных помех, движения воздуха и т. д. крутильная система помещалась в специальный ящик, изолированный фольгой и фланелью. Ящик с крутильной системой и притягивающие грузы вместе с балкой покрывались, кроме того, еще одним деревянным ящиком. Вся аппаратура Бейли для опытов была установлена в одной из комнат его дома, в которой находился и наблюдатель. Приближение наблюдателя каждые несколько минут для отсчетов приводило к значительным возмущениям из-за появления дополнительной массы, ко-

торая к тому же служила источником температурных помех. Во время опытов Бейли наблюдалось заметное изменение температуры, составляющее $0^{\circ},15$ в час, а иногда доходившее и до $0^{\circ},5$ в час. Бейли применил в эксперименте ряд новшеств. Так, он разработал методику обработки результатов наблюдений, которая исключала линейную часть влияния на результаты изменения с течением времени среднего положения крутильной системы, называемого в инструментальной гравиметрии «сползанием нуля-пункта» прибора. Бейли использовал статический метод определения величины притяжения между притягивающими и притягиваемыми массами. Он более аккуратно, чем предшественники, учитывал взаимное притяжение между притягивающимися массами. Он учитывал то обстоятельство, что балка, несущая притягивающие массы, изменяла свое положение, располагаясь то по одну, то по другую сторону от притягиваемых масс. Взаимодействующие массы считались точками, положения которых совпадают с центрами тяжести этих масс, а массы коромысла и балки — равномерно распределенными по их длинам.

В теории, которую использовал Бейли, не учитывалось затухание крутильных колебаний. На это обратил внимание Хирн [55], который дал методику определения момента сил притяжения с учетом затухания крутильных колебаний весов. Как показала оценка Пойнтинга [83], тот факт, что в своих опытах Бейли пренебрегал затуханием колебаний, приводило к ошибке в определении периода колебаний T , составляющей $1 : 1000$ долю периода. Это дает ошибку в определении средней плотности Земли, равную $0,01 \text{ г/см}^3$. Бейли оценил погрешность в определении массы с учетом приведения притягивающих масс к вакууму. Оказалось, что для свинцовых шаров она составляет $1 : 9000$ от полной величины притяжения и несколько больше для шаров из менее плотных материалов. Поскольку точность учета других поправок была ниже, то этой поправкой пренебрегали.

Бейли провел 2153 эксперимента, объединенные в 62 серии. По числу выполненных экспериментов эта работа является выдающейся. Однако простое увеличение числа опытов, если чувствительность аппаратуры недостаточна,

не может повысить точность окончательного результата, хотя формально ошибка результата уменьшится. Так произошло и с результатами Бейли. В своей работе он дает окончательное значение средней плотности Земли с пятью значащими цифрами. Однако реальными являются только первые три из них

$$\sigma_{\oplus} = 5,67 \pm 0,02 \text{ г/см}^3.$$

Многие годы опыты Бейли считались образцовыми. Упомянутые выше работы с анализом причин расхождения результатов Бейли появились позже. Так, Хирн [55] помимо замечания о необходимости учета сил сопротивления воздуха, указывает на необходимость определения частоты колебаний отдельно для обоих положений притягивающих масс в каждом опыте.

Критические замечания Пойнтинга [82] были сделаны через пятьдесят лет после работ самого Бейли. В 1878 г. Корню и Бейль [46], проанализировав опыты Бейли, дали объяснение возможной причины зависимости полученной в опытах Бейли средней плотности Земли от размеров притягиваемых масс на коромысле. Они показали, что ошибка связана с методикой обработки результатов регистрации положения крутильной системы и неправильным учетом притяжения коромысла. После исправления этих недочетов выяснилось, что значение плотности Земли из опытов Бейли близко к $5,55 \text{ г/см}^3$. Неудовлетворительно обстояло дело с учетом влияния температуры, что могло привести к заметным систематическим ошибкам. Хикс [59] обнаружил в результатах Бейли систематическую зависимость средней плотности Земли от температуры во время соответствующего опыта. Таким образом, опыты Бейли оказались не вполне совершенными. Необходимо было проведение новых опытов, в которых были бы учтены вскрытые недостатки.

§ 10. Опыты Корню и Бейля

В семидесятых годах прошлого столетия опыты по определению средней плотности Земли с помощью крутильных весов ставятся во Франции молодым профессором экспериментальной физики Политехнической школы

Франции А. Корню (1842—1902) совместно с Ж. Бейлем (1841—1900). Корню был замечательным экспериментатором в оптике и спектроскопии. В те же годы, когда он занимался вместе со своим ассистентом Бейлем определением средней плотности Земли, он измерял и другую фундаментальную постоянную физики — скорость света.

Если Кавендиш, Райх и Бейли для увеличения эффекта притяжения старались использовать большие притягивающие массы и большие плечи коромысла крутильной системы, то Корню и Бейль [44] построили прибор, где прежняя чувствительность при меньших притягивающих массах достигается применением более тонкой и длинной нити. Известно, что чувствительность крутильных весов определяется упругостью нити, которая прямо пропорциональна четвертой степени диаметра нити и обратно пропорциональна ее длине. В приборе Корню — Бейля нить была изготовлена из отожженного серебра и имела длину 4,15 м. Это была наибольшая длина, которую допускала высота подвала Политехнической школы, где ставился эксперимент.

Легкое коромысло прибора Корню — Бейля длиной 50 см было почти в четыре раза короче коромысла в приборах предыдущих исследователей. Изготовлено оно было из алюминиевой трубочки, на концах которой крепились медные шарообразные массы, весившие по 109 г. Период собственных колебаний коромысла, несмотря на небольшие его размеры, благодаря меньшей жесткости крутильной нити был порядка 400 секунд. Как мы увидим ниже, еще дальше по пути миниатюризации крутильных весов пошел Бойс. Оригинально в приборе Корню и Бейля были осуществлены две притягивающие массы. Они представляли собой полые сферические железные сосуды, вмещавшие каждый по 12 кг ртути. Этим Корню и Бейль хотели добиться однородной плотности притягивающих масс. Однако такая конструкция снижала точность измерения расстояний между массами.

Регистрирующее устройство было обычное, типа использованного Райхом и Бейли. Раскачивание крутильной системы авторы производили своеобразным способом. Чтобы исключить возникновение движений воздуха, неизбежных при перестановке значительных по размерам

притягивающих масс, Корню и Бейль перекачивали последовательно ртуть из одного сосуда в другой. В итоге своей работы Корню и Бейль [44] получили два несколько отличающихся друг от друга значения средней плотности Земли. Первое $\sigma_{\oplus} = 5,56 \text{ г/см}^3$ соответствовало экспериментам, проводившимся летом, а второе — $\sigma_{\oplus} = 5,50 \text{ г/см}^3$ — зимой. Различие результатов, составляющее $0,06 \text{ г/см}^3$, они объяснили прогибом коромысла и уменьшением вследствие этого момента инерции. Во второй работе [46], появившейся через пять лет после первой, они приводят результаты новых определений средней плотности Земли. Полученный результат $\sigma_{\oplus} = 5,56 \text{ г/см}^3$, оказался точно совпадающим с первым. На этот раз к прежней аппаратуре они добавили еще две большие ртутные массы и несколько изменили методику измерения расстояний.

Корню и Бейль провели ряд теоретических исследований для усовершенствования метода определения средней плотности Земли по периоду крутильных колебаний. Они проанализировали [45] влияние сопротивления воздуха на период крутильных колебаний и опытным путем установили, что сила сопротивления воздуха пропорциональна первой степени скорости движения крутильной системы, а амплитуда колебаний убывает по закону геометрической прогрессии. Именно эти исследования позволили Корню и Бейлю обнаружить дефект в методике обработки наблюдений, применявшейся Бейли.

Другим развитием теории было рассмотрение Корню и Бейлем [47] дифференциального уравнения крутильных колебаний с учетом члена, пропорционального квадрату угла отклонения крутильной системы в выражении момента восстанавливающих сил. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний они представляли в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi - n_1^2\varphi^2 = 0. \quad (23)$$

Второй член в уравнении (23) представляет момент сил сопротивления воздуха движению коромысла. Третье слагаемое имеет тот же смысл, что в уравнении (19). Наконец, последний член, пропорциональный квадрату угла отклонения крутильной системы от положения равнове-

сия, призван учитывать нелинейность восстанавливающей силы. Пропорциональность квадрату угла отклонения означает, что учитывается асимметрия восстанавливающей силы относительно положения равновесия. Следует заметить, что было бы более существенным учитывать нелинейную составляющую восстанавливающей упругой силы, симметричную относительно положения равновесия, которая представляется слагаемым вида $n_2^2 \varphi^3$.

Решение уравнения (23) Корню и Бейль получили в виде

$$\varphi = Ae^{-\alpha t} \sin n_0(t - t_0) + \frac{A^2 n_1^2}{n^2} e^{-2\alpha t} [1 + \cos^2 n_0(t - t_0)],$$

где частота $n_0 = 2\pi/T = \sqrt{n^2 - \alpha^2}$. Однако все эти выводы авторов не нашли отражения в практике их собственных экспериментов.

В опубликованных работах Корню и Бейля мало сведений об экспериментальной части их исследований. В них не приводится сколько-нибудь подробного описания методики проведения и обработки наблюдений с крутильными весами. Нет также и значений средней плотности Земли по отдельным рядам наблюдений, а даны лишь окончательные средние значения средней плотности Земли, притом без оценки их точности. Известно, что Корню и Бейль не разнообразили опыты так, как это сделал их предшественник Бейли. Большее значение, чем эксперименты, имеют в работах Корню и Бейля их теоретические исследования, которые были использованы в последующих более точных экспериментах другими исследователями.

§ 11. Опыты по определению постоянной тяготения с миниатюрной аппаратурой

Существенное усовершенствование методики определения постоянной тяготения было сделано в Англии Ч. Бойсом (1855—1944). В отличие от прежних авторов, основной целью эксперимента он ставил задачу определения постоянной тяготения, а затем уже средней плотности Земли. Изменения температуры приводят к появлению

конвективных потоков воздуха, к деформациям деталей прибора, изменениям упругих свойств нити крутильной системы и т. д. Величины температурных флуктуаций, приводящие к этим неприятным последствиям, оказываются меньшими в аппаратуре меньших размеров, поскольку размеры прибора и температурные помехи находятся в прямой зависимости. Опасаясь влияния температурных помех Бойс пошел по линии миниатюризации своей аппаратуры.

В своей первой работе [32], выполненной в Оксфорде, Бойс показал, что чувствительность аппаратуры не зависит от ее размеров. Он рассуждал следующим образом. Пусть имеется два прибора, все соответствующие линейные размеры которых находятся в отношении $1 : n$. Моменты инерции коромысел этих приборов, изготовленных из одних и тех же материалов, относятся как $1 : n^5$. Так как притягивающие массы находятся в отношении $1 : n^3$, а расстояние между ними $1 : n$, то величина притяжения в этих приборах будет относиться как $1 : n^6/n^2$, или $1 : n^4$. Поскольку плечи коромысел изменяются в отношении $1 : n$, как и все линейные размеры приборов, то момент сил притяжения, действующих на коромысла и отклоняющих его от положения равновесия, относится к соответствующему моменту другого прибора как $1 : n^5$. Чувствительность крутильной системы зависит от периода ее колебания, который в свою очередь зависит от отношения момента инерции коромысла и момента сил притяжения. Это отношение, как легко видеть, равно $1 : 1$ для любых приборов, подобных по размеру и изготовленных из одного и того же материала.

Приведенные выше рассуждения справедливы, если все размеры одного прибора изменяются в одном и том же отношении. Однако может оказаться выгодным уменьшить одни элементы и увеличить другие, учитывая температурные влияния.

Уменьшение размеров аппаратуры лимитируется возникающей трудностью сохранения той же точности относительных измерений линейных параметров прибора. В макетном своем варианте прибор Бойса имел коромысло длиной в 10 мм, а малые массы в виде свинцовых цилиндров имели диаметр 3 мм и длину 11,3 мм [32]. Притяги-

вающие массы в виде свинцовых цилиндров имели диаметр и длину 50,8 мм. Период собственных колебаний этой системы был 80° . Чтобы добиться относительной точности линейных измерений 1 : 10 000, Бойс решил несколько увеличить размеры прибора. Описание аппаратуры, методики и результата определения постоянной тяготения Бойс подробно дает в работе [34]. Краткое резюме ее изложено в заметке [33].

В качестве нити крутильной системы, как в макете прибора, так и в рабочем экземпляре, Бойс использовал нить из плавленого кварца, диаметр которой составлял несколько десятков микрон. Торсионная головка, к которой подвешивается нить, позволяла изменять высоту подвески коромысла и перемещать его в горизонтальном направлении.

Длина коромысла в рабочем приборе Бойса была равна 2,3 см. Притягивающие массы представляли собой свинцовые шары, расстояние между центрами которых составило 10—15 см. Массы коромысла, изготовленные из золота, в разных опытах имели вес: 1,3 г, 2,65 г, 3,98 г. В одном из опытов вместо шаров применялись золотые цилиндры.

Если помещать все массы в одной горизонтальной плоскости, то близость больших масс к двум малым, разделенным незначительным расстоянием (2,3 см), уменьшает пару сил притяжения. Чтобы пара сил притяжения была больше, Бойс поместил притягиваемые массы попарно на различных уровнях, находящихся на расстоянии 15 см друг от друга (рис. 5). Бойс исследовал влияние наивыгоднейшего положения притягивающих масс на отклонение крутильной системы, для чего притягивающие массы поворачивались через каждые 60° вокруг оси нити. Наиболее выгодным оказалось такое положение, когда соединяющая центры притягивающих масс линия и ось коромысла составляют острый угол.

Для исключения влияния конвективных потоков воздуха, помимо миниатюризации прибора, Бойс предусматривал различные экраны. Крутильная система помещалась в массивный латунный цилиндр, установленный на массивном латунном основании. Второй цилиндр закрывал первый вместе с притягивающими массами. Бойс

не создавал вакуума в приборе. Он пытался провести измерения, заполняя цилиндр с крутильной системой водородом. Однако результаты опытов с водородной средой оказались неудовлетворительными.

Для измерения линейных размеров деталей прибора и расстояний между ними использовался катетометр и винтовой микрометр. Измерение расстояний и времени, а также взвешивание Бойс производил с расчетом получить их относительную точность порядка 10^{-4} — $5 \cdot 10^{-5}$. Такую же точность рассчитывал он получить в определении постоянной тяготения. Однако результат его оказался более чем на порядок грубее. Из всех значений постоянной тяготения, определенных при различных условиях, автор отдает предпочтение только некоторым, и выводит среднее весовое значение постоянной тяготения $f = 6,658 \cdot 10^{-11}$

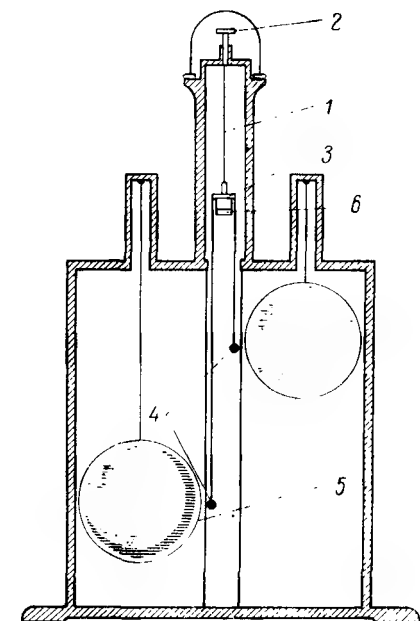


Рис. 5. Поперечный разрез прибора Бойса.

1 — кварцевая нить крутильной системы, 2 — торсионная головка, 3 — коромысло, 4 — притягиваемые массы, 5 — притягивающие массы, 6 — зеркало крутильной системы.

$\text{м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$ и средней плотности Земли $\sigma_{\oplus} = 5,527 \text{ г/см}^3$. Полученные им девять значений постоянной тяготения различаются между собой на две единицы третьего знака. Мы приводим здесь значения f и $\sigma_{\oplus}$, полученные Бойсом, округлив пятую значащую цифру, которая не-реальна.

В заключение следует указать, что большая миниатюризация прибора неизбежно затруднила высокую точ-

ность относительных измерений расстояний и масс, а также усилила влияние неоднородности притягивающих масс. Кроме того, благодаря внутреннему трению в нити более короткая нить будет иметь большое затухание, что затрудняет точное определение периода колебаний системы. Таким образом, слишком большая миниатюризация аппаратуры при определениях постоянной тяготения вряд ли целесообразна.

§ 12. Экспериментальные и теоретические исследования Этвеша по определению постоянной тяготения

В конце прошлого столетия различные опыты по исследованию гравитации провел выдающийся венгерский физик Р. Этвеш (1848—1919). Он был профессором Будапештского университета, ныне носящего его имя. Этвеш разработал ряд приборов для изучения гравитационного поля Земли.

Первоначально, в 1888 г., Этвеш изготовил прибор, по виду очень похожий на квадрант-электрометр, используемый для демонстрации эффектов притяжения. Крутильная система прибора для улучшения температурных условий помещалась в металлический кожух. Под крутильной системой располагался металлический цилиндр, ось которого совпадала с осью нити. Внутренность цилиндра разделялась перегородками на четыре квадранта, два из которых располагались вдоль оси коромысла, два других — поперек. Парно противоположные квадранты могли заполняться ртутью, притягивающей массы крутильной системы. Однако трудности расчета эффекта притяжения масс в форме квадрантов цилиндра заставили вскоре Этвеша использовать в качестве притягивающих масс свинцовые шары и бруски, вес которых порой достигал 100 кг. Так же как и квадранты цилиндра со ртутью, свинцовые шары и бруски располагались под крутильной системой. При периоде колебаний крутильной системы порядка 10^m коромысло отклонялось под действием притяжения на $2-3^\circ$. Для регистрации этих отклонений использовался как фотографический, так и визуальный способы наблюдений.

Этвеш разработал [50], как он называет, «совершенно ловый метод» для изучения эффектов притяжения. Он предложил изучать гравитационное поле по изменению силы притяжения, которое определяется по изменению

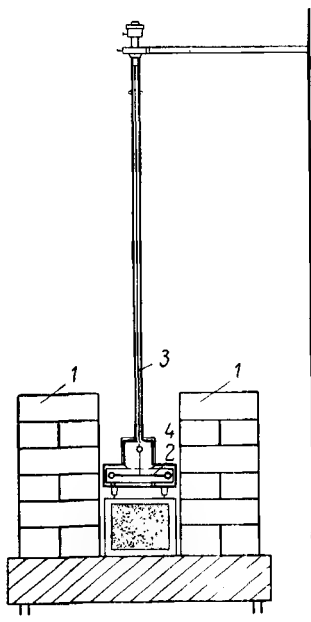


Рис. 6. Общий вид прибора Этвеша.

1 — притягивающие массы, 2 — коромысло с притягиваемыми массами, 3 — нить крутильной системы, 4 — кожух.

периода собственных колебаний коромысла с грузами в гравитационном поле известных масс. Иными словами, Этвеш применил для решения ряда задач по тяготению дифференциальные измерения. Крутильная система нового прибора ничем особенно не примечательна. Зато весьма оригинальным было расположение притягивающих масс, которое позволило Этвешу добиться увеличения чувствительности крутильных весов. Эта же идея была им использована в дальнейшем для создания «гравитационного компенсатора», о чем подробно будет сказано ниже.

В приборе Этвеша для определения постоянной тяготения притягивающие массы были изготовлены из свинца в виде двух параллелепипедов с основанием 30×30 см и высотой 60 см (рис. 6). Соответствующие грани обоих параллелепипедов были параллельны. В пространстве шириной 30 см между параллелепипедами устанавливалась крутильная система. Период колебания ее при расположении коромысла вдоль линии установки параллелепипедов был равен 641° , а при поперечном расположении — 860° .

Аналитическая теория прибора, разработанная Этвешем, заключалась в следующем. Совместим начало притя-

моугольной системы координат x, y, z , неподвижно связанной с параллелепипедом, с центром тяжести крутильной системы. Ось z направим вниз по нити, ось y — параллельно внутренним граням параллелепипедов (см. рис. 6), а ось x — перпендикулярно к осям y и z . Кроме системы координат x, y, z , введем систему прямоугольных координат ξ, η, ζ с центром также в точке O , неизменно связанную с коромыслом крутильной системы. Ось ζ — направим по оси z , ось ξ — вдоль продольной оси коромысла, а ось η — перпендикулярно к осям ξ и ζ . Координаты x, y, z связаны с координатами ξ, η, ζ следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \\ z &= \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Здесь α — угол между направлениями оси x и оси ξ .

Момент относительно оси нити силы притяжения коромысла с шаровыми массами и притягивающими массами включая массу Земли, равен

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}} = \iiint \left(x \frac{\partial W}{\partial y} - y \frac{\partial W}{\partial x} \right) dm,$$

где W — гравитационный потенциал притягивающих масс, а $\partial W/\partial x$ и $\partial W/\partial y$ — соответствующие силы притяжения по осям x и y ; Ω — объем коромысла с его притягиваемыми массами. Разлагая величины $\partial W/\partial x$ и $\partial W/\partial y$ в ряд по степеням расстояний от центра тяжести крутильной системы и переходя к новым переменным ξ, η, ζ с помощью соотношений (24), получим момент сил притяжения. После некоторого упрощения с достаточным приближением можно считать его равным

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\alpha) = \frac{J}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 \sin 2\alpha + J \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 \cos 2\alpha,$$

где J — момент инерции крутильной системы относительно оси ζ , $(\partial^2 W/\partial y^2)_0$, $(\partial^2 W/\partial x^2)_0$ и $(\partial^2 W/\partial x \partial y)_0$ — вторые производные потенциала притяжения окружающих масс, включая притягивающие массы, в центре тяжести крутильной системы относительно x и y .

Момент упругих сил закрученной нити Этьеш полагал пропорциональным углу поворота φ коромысла

$$\mathfrak{M}_\tau(\varphi) = \tau\varphi,$$

где τ — упругая постоянная нити. Угол φ связан с углом α соотношением

$$\alpha = \alpha_0 + \varphi;$$

здесь α_0 — азимут коромысла, соответствующий незакрученной нити.

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний системы в гравитационном поле окружающих масс имеет вид

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi) + \mathfrak{M}_\tau(\varphi) = 0. \quad (25)$$

Учитывая равенство (19), можно уравнение (25) переписать в виде

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n^2\varphi + C = 0,$$

где

$$n^2 = \frac{\tau}{J} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 \cos 2\alpha_0 + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 \sin 2\alpha_0,$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 \sin 2\alpha_0 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 \cos 2\alpha_0.$$

Период собственных колебаний крутильной системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\tau - J \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 \cos 2\alpha_0 + 2J \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 \sin 2\alpha_0}}.$$

Легко видеть, что если провести измерения периода T в двух азимутах, отличающихся друг от друга на 90° , то получим

$$\pi \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right) = 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 \cos 2\alpha_0 +$$

$$+ 4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 \sin 2\alpha_0, \quad (26)$$

где T_1 и T_2 — периоды собственных колебаний в упомянутых азимутах.

В этих формулах не учитывается изменение периода колебаний из-за неизбежного сопротивления окружающего воздуха движению коромысла. Поскольку Этвеш свои эксперименты проводил не в вакууме, то он принимал сопротивление воздуха при малых скоростях движения коромысла пропорциональным первой степени скорости движения и вводил в измеренный период поправку. Истинный период должен быть равен

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{8\pi^2} \beta^2 \right),$$

где T_0 — измеренный период собственных колебаний, β — логарифмический декремент колебаний, равный логарифму отношения амплитуд двух последовательных колебаний.

Для выбранных притягивающих масс Этвеш вычислил производные потенциала притяжения для центра тяжести крутильной системы и привел уравнение (26) к виду

$$\pi^2 \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right) = 13,427 \sigma f (1 - \varepsilon').$$

Здесь добавлена по сравнению с уравнением (26) дополнительная поправка, пропорциональная ε' . Она обусловлена необходимостью учитывать, кроме притягиваемых масс, и массу коромысла. Величина ε' у Этвеша не превышала 0,01.

Этвеш провел 59 определений величины $(1/T_1^2 - 1/T_2^2)$, причем каждое из определений состояло из восьми серий колебаний в продольном и поперечном направлениях. Среднее значение этой величины оказалось равным $0,00000108031 \text{ сек}^{-2}$. Разность периодов T_1 и T_2 была достаточно мала. При $T = 641^s$ разность между максимальным и минимальным значениями периодов составляла всего $0^s,31$. Для $T = 860^s$ эта же разность равнялась $1^s,03$.

Опыты Этвеша показали, что присутствие воздуха изменяло период на значительно бóльшую величину, чем это можно было ожидать из исследований Бесселя с маятниками. Например, период колебаний коромысла в среде

с нормальным атмосферным давлением был $648^{\circ},92$, а в среде с давлением 20 мм ртутного столба оказывался $648^{\circ},00$. Влияние окружающего воздуха существенно зависит от положения стенок и перегородок кожуха прибора по отношению к коромыслу. Этвеш не сумел поместить крутильную систему в вакуум и в этом он видел недостаток своих опытов. Другим существенным недостатком Этвеш считал неоднородность притягивающих масс по плотности. Для исключения ошибок, обусловленных этим фактором, он рекомендовал использовать вместо свинцовых притягивающих масс ртуть.

В итоге своих экспериментов Этвеш получил [50] постоянную тяготения $f = 6,657 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$ с относительной точностью 1 : 500. Однако он не настаивал на этом числовом значении постоянной тяготения, поскольку главным в своих исследованиях Этвеш считал разработку метода определения этой величины.

Для увеличения чувствительности крутильной системы Этвеш предложил два устройства, названные им *компенсатором силы тяжести* и *мультипликатором тяготения*.

Компенсатор силы тяжести устроен следующим образом. По обе стороны от каждой из притягиваемых масс помещаются по две одинаковые массы компенсатора, так что в исходном положении продольная ось коромысла располагается симметрично относительно этих четырех притягивающих масс. В этом случае действующая на коромысло сила притяжения масс компенсатора равна нулю. При отклонении конца коромысла от исходного положения одна из притягивающих масс компенсатора будет притягивать массы коромысла сильнее, а противоположная ей — слабее. То же произойдет и с другим концом коромысла.

При малых углах отклонения коромысла момент сил притяжения массами компенсатора масс коромысла будет пропорционален углу отклонения φ , т. е. равен $\mu\varphi$, где μ — некоторая постоянная. Если момент сил притяжения внешних масс обозначить $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$, а момент упругих сил закрученной нити $\tau\varphi$, то для положения равновесия имеем равенство

$$\tau\varphi = \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi) + \mu\varphi.$$

Отсюда момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ равен

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi) = (\tau - \mu) \varphi.$$

Последнее равенство означает, что упругая постоянная нити τ стала как бы меньше на величину μ , т. е. чувствительность крутильной системы увеличилась. Таким

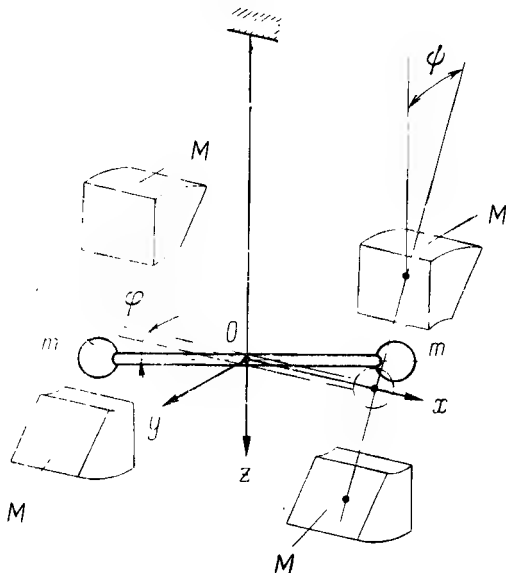


Рис. 7. Схема компенсатора притяжения Этвеша.

M — массы компенсатора, m — притягиваемые массы крутильной системы, φ — угол отклонения крутильной системы от равновесного положения, ψ — угол отклонения плоскости симметрии компенсирующих масс от вертикальной плоскости.

образом, массы гравитационного компенсатора своим притяжением как бы уменьшают часть величины упругой силы закрученной нити.

Для того чтобы иметь возможность регулировать величину компенсации, Этвеш изготовил гравитационный компенсатор (рис. 7). Изменение угла наклона плоскости симметрии компенсатора ψ изменяет чувствительность

крутильной системы. Если массы M компенсатора считать точечными массами, то в зависимости от угла ψ момент сил притяжения массами M масс m , укрепленных на концах коромысла, равен

$$\mu\varphi = 2flmM \left[\frac{\cos \psi_1}{r_1^2} - \frac{\cos \psi_2}{r_2^2} \right] \cos \varphi. \quad (27)$$

Здесь l — длина плеча коромысла, φ — отклонение коромысла от среднего положения, r_1 и r_2 — расстояния масс M от m , ψ_1 и ψ_2 — углы наклона плоскости, проходящей через продольную ось коромысла и массы M гравитационного компенсатора.

Равенство (27) с достаточным приближением может быть приведено к виду

$$\mu\varphi = fJ \frac{M}{r^3} (1 + 3 \cos 2\psi) \varphi, \quad (28)$$

где J — момент инерции коромысла относительно оси нити, r — полурасстояние между массами гравитационного компенсатора. Учитывая равенство (28), эффективную упругую постоянную крутильной нити можно выразить так:

$$\bar{\tau} = \tau - \mu\varphi = \tau - fJ \frac{M}{r^3} (1 + 3 \cos 2\psi).$$

Изменяя параметры M , r , ψ гравитационного компенсатора, можно добиться увеличения чувствительности крутильной системы без изменения последней.

Этвеш изготовил крутильную систему с гравитационным компенсатором, в котором $\tau = 0,1478$, $\mu = 0,0446 \times (1 + 3 \cos 2\psi)$, т. е. эффективная величина τ прибора с гравитационным компенсатором была равна $0,1032 - 0,1396 \cos 2\psi$. При действии массы в 5 кг на расстоянии 50 см отклонение крутильной системы с гравитационным компенсатором, у которого $M = 40$ кг, а $r = 10$ см и при $J = 20000 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, увеличилось в десятки раз по сравнению с тем, что имело место без гравитационного компенсатора.

Мультипликатор тяготения был предложен Этвешем также для увеличения чувствительности крутильной системы. Под коромыслом с притягивающими массами помещаются симметрично некоторые массы. Эти массы то приближаются, то удаляются в такт собственным коле-

баниям коромысла, что приводит к его раскачиванию. Если известен период возмущений и амплитуда вынужденных колебаний крутильной системы, то период колебаний может быть определен с высокой точностью. Эта идея мультипликатора была в дальнейшем использована Зарадничеком [106] в его резонансном способе, а также Хейлом и Хржановским [58] для первоначального раскачивания крутильной системы.

Мы здесь не останавливаемся на теории и практике приборов, разработанных Этвешем для полевых измерений величин, характеризующих гравитационное поле Земли. Эти приборы получили широкое распространение под названием гравитационных вариометров. Их описанию посвящены целые главы в учебниках по гравиметрии. Развитие идей Этвеша в области разведочной гравиметрии имело большое практическое значение. О некоторых деталях развития идей Этвеша у нас в стране можно узнать из работы [18].

Подводя итог работам Этвеша, следует подчеркнуть многочисленность его новых идей постановки различных опытов по исследованию тяготения.

§ 13. Измерения постоянной тяготения Брауном

В 1897 г. была опубликована работа К. Брауна (1831—1907) с новыми результатами определения постоянной тяготения и средней плотности Земли [35].

Крутильная система Брауна состояла из латунной нити длиной около 1 м и диаметром 55 мк, на которой подвешивалось коромысло. На его концах, на расстоянии 12,3 см от оси нити укреплялись латунные позолоченные шары. Вес каждого из них был равен 54 г. Период собственных колебаний крутильной системы был около 1200^с (при продольном и поперечном положении притягивающих масс периоды отличались на 46^с). В качестве притягивающих масс использовались железные шарообразные сосуды с толщиной стенок около 5 мм, наполненные девятью килограммами ртути каждый. Этим достигалась однородность притягивающих масс. Однако из-за отклонения полости сосуда от точной сферы, а также ввиду сложности измерения толщины стенок трудно было

определить положение центра тяжести притягивающей массы. Кроме того, дополнительную неопределенность вносили и мениск на поверхности ртути, горловина сосуда, крючки для подвеса и т. д. Колбы со ртутью подвешивались на двух нитях, расстояние между которыми было около 40 см. Подвесы позволяли юстировать положение колб в желаемом направлении.

Крутильная система помещалась под стеклянным колпаком, устанавливаемом на стеклянном основании, изготовленном из оптического стекла. Для регистрации положения крутильной системы луч света направлялся через стеклянное основание на зеркало коромысла и, отразившись от него, возвращался обратно к наблюдателю. Система регистрации отклонения крутильной системы в приборе Брауна ничем не отличалась от аналогичных устройств в предшествовавших экспериментах.

Основное влияние на точность результатов оказывало изменение упругой постоянной нити. Трудность учета этого обстоятельства состояла в том, что нельзя было отделить влияние сил притяжения на период колебаний крутильной системы от влияния упругих сил закрученной нити. Величина упругой постоянной нити сильно зависит от изменений температуры. Браун принял меры к поддержанию постоянного температурного режима в помещении, где ставились опыты. Прибор покрывался деревянным кожухом, помещение держалось закрытым. Но все же температурный режим в опытах Брауна был несовершенным, поэтому следовало ожидать погрешностей, обусловленных температурными изменениями упругих свойств нити.

В отличие от своих предшественников, Браун помещал крутильную систему прибора в среду с разреженным воздухом. Первоначально он начал опыты при нормальном давлении, а с 1890 г. — при давлении 90 мм рт. ст. Меньшее давление не применялось из-за опасности раздавить стеклянное основание прибора. После двух лет опытов он рискнул понизить давление. Но имевшийся вакуумный насос позволил ему достичь разрежения только в 17 мм рт. ст. Лишь еще два года спустя он, используя ртутный вакуумный насос, довел давление до 4 мм рт. ст. Окончательное значение постоянной тяготения Браун

вывел по результатам наблюдений, проведенных им как при давлении воздуха в 17 мм, так и при 4 мм рт. ст. Применение вакуума усложнило систему управления прибором. Поворот крутильной системы под стеклянным колпаком осуществлялся с помощью магнитной головки, с которой была связана нить. Поворот магнитной головки, а с ее помощью и всей крутильной системы осуществлялся подводимым извне магнитом.

Браун использовал наряду со статическим методом определения постоянной тяготения и динамический метод крутильных колебаний. В опыте учитывалось притяжение не только шаров на концах коромысла, но и самого коромысла. Эффект притяжения коромысла составлял около 2% от величины притяжения, действующего на шары. Максимальное притяжение между массами шаров на коромысле и колбами со ртутью в приборе Брауна было тогда, когда линия, соединяющая центры колб, находилась под углом 21° к продольной оси коромысла.

При обработке результатов наблюдений учитывались поправки, достигающие 0,02% от полной величины притяжения. Основная поправка в статическом методе была обусловлена упругими последствиями нити, которые особенно сильно проявлялись при больших периодах собственных колебаний крутильной системы. Автор провел предварительные исследования этого эффекта при больших отклонениях крутильной системы от положения равновесия для куска той же проволоки, из которой была изготовлена нить в приборе. Для создания необходимых больших моментов сил, действующих на крутильную систему, Браун использовал вместо притягиваемых масс магнит. Путем вращения верхнего закрепленного конца нити крутильная система выводилась из плоскости магнитного меридиана, что приводило к возникновению свободных колебаний. Из этих опытов определялась поправка, учитывающая упругие последствия нити. В полученные результаты вводились также поправки за несовпадение центра тяжести крутильной системы с осью нити, за температурные изменения размеров взаимодействующих масс и расстояний между ними, за небольшие отличия масс от шарообразности, а также некоторые другие поправки, вызванные несовер-

шенством центрировки прибора. Для измерения периода колебаний Браун отмечал в телескоп моменты прохождения через крест нитей нескольких делений шкалы. Это позволяло ему вычислять период колебаний с учетом неравномерности движения коромысла.

При динамическом методе увеличилось количество поправок, которые необходимо было учитывать. Так, пришлось вводить поправку за приведение наблюдаемого периода к периоду незатухающих колебаний. Оказалось, что при больших периодах в приборе имеется очень сильное затухание колебаний крутильной системы. При этом, как обнаружил Браун, период колебаний в начале увеличивается, а затем уменьшается. Браун неудовлетворительно объяснил это явление изменением молекулярной структуры нити в процессе колебаний. Он обнаружил и увеличение затухания крутильных колебаний с увеличением амплитуды, приписав его влиянию сопротивления воздуха (как показывают более поздние исследования крутильных колебаний, этот эффект обусловлен внутренним трением нити, которое действует пропорционально амплитуде колебаний). Кроме того, вводились поправки, учитывающие приведение наблюдаемого периода к периоду колебаний с бесконечно малой амплитудой. Браун оценивал также ошибки, происходящие от несимметрии притягивающих масс и масс крутильной системы, центрировки нити, притяжения масс окружающих столбов, стен и т. д. Упругие несовершенства нити Браун считал одной из основных преград для повышения точности окончательных результатов. Он пришел к выводу, что для успеха нужно впредь использовать кварцевую нить.

Следует остановиться на вкладе Брауна в теорию определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов. Момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ притягивающей массы M , действующий на массу m , укрепленную на конце коромысла на расстоянии R от оси крутильной нити, Браун представлял в виде

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi) = \frac{f m M R \rho}{(\rho - R)^3} \varphi \left[1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8} H_1 \right) \varphi^2 + \left(\frac{1}{120} + \frac{3}{32} H_1 + \frac{15}{128} H_1^2 \right) \varphi^4 + \dots \right], \quad (29)$$

где

$$H_1 = \frac{4Rp}{(\rho - R)^2},$$

а ρ — расстояние центра массы M от оси нити. Аналогичное выражение можно записать для момента силы притяжения между той же притягивающей массой M и массой m , расположенной на другом конце коромысла:

$$\mathfrak{M}_{\text{пр } 2}(\varphi) = \frac{fmMR\rho}{(\rho + R)^3} \varphi \left[1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{8} H_2 \right) \varphi^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{120} - \frac{3}{32} H_2 + \frac{15}{128} H_2^2 \right) \varphi^4 + \dots \right], \quad (30)$$

где

$$H_2 = \frac{4Rp}{(\rho + R)^2}.$$

Разность моментов $\mathfrak{M}_{\text{пр } 1}$ и $\mathfrak{M}_{\text{пр } 2}$ сил притяжения будет заставлять поворачиваться крутильную систему вокруг оси нити. Равенства (29) и (30) показывают, что Браун учитывал нелинейную зависимость момента силы притяжения при малых расстояниях между притягивающими массами от угла отклонения крутильной системы. Теория метода Брауном строилась в предположении шарообразных взаимодействующих масс. Отличие гравитационного эффекта реальных притягивающихся масс от шара учитывалось в его расчетах путем вычисления дополнительного эффекта от некоторой точечной массы, располагаемой в определенном месте. Попытка учесть реальное распределение масс является в работе Брауна шагом вперед по сравнению с исследованиями его предшественников.

В итоге своих четырехлетних опытов Браун вывел значение средней плотности Земли, используя 20 значений, определенных статическим способом и 26 значений — динамическим. Он не обнаружил какого-либо систематического различия в значениях, полученных этими двумя методами. Значениям, определенным при давлении 4 мм рт. ст. приписывался вес 2, а при 17 мм рт. ст. — вес 1. Кроме того, всем значениям, определенным статическим методом, придавался вес в два раза больший, чем

динамическим. В итоге Браун получил $\sigma_{\oplus} = 5,529 \pm \pm 0,002$. Впрочем, простое среднее из всех значений, полученных Брауном, оказывается точно таким же. В дальнейшем Браун вновь и вновь возвращается к переработке результатов своих наблюдений 1892—1894 гг., вводя различные поправки (за упругие последствия крутильной нити, асимметрию колебаний и пр.). В результате этого возможно изменение $\sigma_{\oplus}$ на одну единицу четвертого знака, т. е. в пределах ошибки определения средней плотности Земли. Анализируя на основании своих опытов достоинства метода крутильных весов Мичела — Кавендиша по сравнению с методом обычных весов, Браун пришел к выводу о преимуществах крутильных весов.

§ 14. Определения постоянной тяготения Хейлом

Наиболее современное значение постоянной тяготения получил Хейл в 1930 г. [56], а затем Хейл и Хржановский в 1942 г. [58] в Национальном Бюро мер и стандартов США в Вашингтоне. Мы уже упоминали, что Браун производил определение постоянной тяготения, как измеряя угол статического отклонения коромысла, так и определяя период колебания крутильной системы. Хейл счел целесообразным определять момент сил притяжения между притягивающими массами, основываясь лишь на крутильных колебаниях.

Прибор Хейла (рис. 8) имел алюминиевое коромысло длиной 20,59 см, весившее в вакууме 2,4401 г.

В качестве крутильной нити использовалась отожженная вольфрамовая проволока длиной в 1 м и диаметром 25 мк, разрывавшаяся при нагрузке 165 г. Притягиваемые массы по 50 г каждая подвешивались на нитях, прикрепленных к концам коромысла. На эти массы приходится 99% момента инерции всей крутильной системы. Некоторые осложнения возникли в связи с необходимостью высверлить в грузах отверстия диаметром около 1 мм и длиной 3—4 мм для подвески на нитях. Дефицит масс в местах крепления компенсировался эквивалентной точечной массой на поверхности шара. Хотя применявшаяся система подвески грузов проста и удобна для смены притягиваемых масс, однако ей при-

суща некоторая неопределенность в расстоянии между этими притягиваемыми массами.

Притягиваемые массы изготовлялись в виде шаров из золота, платины и оптического стекла. Разнообразие материалов вызывалось не сомнением, что возможна зависимость значений постоянной тяготения от материала, а желанием исключить влияние ошибок в измерении размеров и веса масс, их плотностной неоднородности, различия магнитных свойств и т. д. Притягивающие массы в виде цилиндров по 66 кг каждый выковывались (с последующей закалкой) из стали с 0,9%-м содержанием углерода. При расчетах учитывалось уменьшение притягивающей массы цилиндров на 9,9 г за счет нахождения их в воздушной среде. Была проведена выборочная проверка плотности кусков стали из заготовок цилиндров. С точностью до $1/50000$ плотность притягивающих масс можно было считать неизменной. Каждый из цилиндров подвешивался на трех проволоочных подвесах.

Период колебаний крутильной системы определялся путем визуальных наблюдений, так как изготовленная система фоторегистрации оказалась неудовлетворительной. При фокусном расстоянии регистрирующей оптической системы 350 см можно было измерять отклонения крутильной системы с точностью до минуты дуги. Для

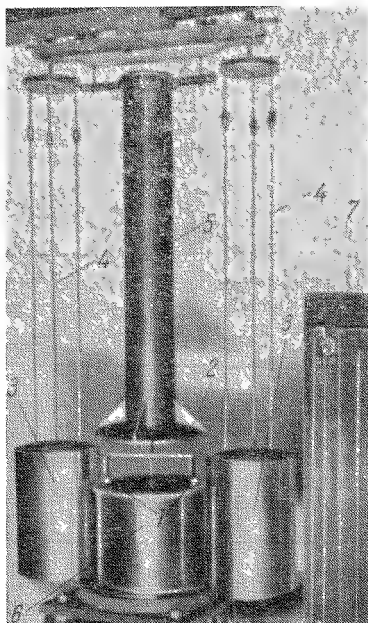


Рис. 8. Общий вид прибора Хейла 1930 г.

1 — притягиваемые массы, 2 — коромысло крутильной системы, 3 — притягивающие массы, 4 — подвесы притягивающих масс, 5 — кожаная нить, 6 — кожух крутильной системы, 7 — манометр.

регистрации времени использовались маятниковые часы Рифлера, вариация суточного хода которых составляла несколько сотых долей секунды. Период колебаний для двух положений притягивающих масс оказался равным 1757^s и 2084^s . Соответственно разность периодов определялась с точностью до $0^s,1$, т. е. с относительной точностью, равной $1 : 3300$.

Колебания крутильной системы происходили в условиях пониженного давления — около 2 мм рт. ст. Исследования Хейла показали, что нет заметного изменения затухания колебаний при изменении давления от 50 мм до 1,5 мм рт. ст., что видно из табл. 5. По-видимому, роль

Таблица 5

Давление воздуха в мм рт. ст.	150	50	20	10	7	5	3	1,5
Отношение двух последовательных амплитуд колебаний	0,70	0,84	0,85	0,85	0,85	0,85	0,86	0,87

сопротивления остаточного воздуха при этих давлениях уже несущественна. Основное влияние на затухание оказывает внутреннее трение в крутильной нити, которое во времена первого опыта Хейла было исследовано мало.

При первоначальной амплитуде колебаний в 4° система могла колебаться в течение 20 часов. Раскачивание крутильной системы производилось попеременным поднесением двух бутылей с 2 кг ртути в каждой то с одной, то с другой стороны коромысла с грузами.

Температура внутри прибора отсчитывалась по термометру. Отсутствие термостатирования прибора является одним из слабых мест опытов Хейла. Использование в качестве больших грузов стальных цилиндров потребовало принятия мер предосторожности, чтобы исключить влияние магнитного поля на крутильную систему. Даже край-

не слабое влияние магнитного поля было бы недопустимо, ибо полный эффект силы притяжения при своем максимальном значении достигал величины всего в 0,001 дины.

Опыты ставились в подвале, разделенном на две комнаты. В одной устанавливался прибор, а в другой располагался наблюдатель. Эффект притяжения наблюдателя составлял менее 10^{-4} от эффекта притяжения больших масс. Чтобы не влиять на показания прибора, наблюдатель в процессе наблюдения оставался на месте. Это, по-видимому, вносило большие погрешности в результаты опыта в связи с изменениями температуры из-за присутствия наблюдателя в помещении, где производился опыт. Отсутствие вибрации в подвале позволяло ставить эксперименты как ночью, так и днем.

Крутильные колебания коромысла с массами в гравитационном поле других масс Хейл описывал дифференциальным уравнением вида (19). Поскольку он ориентировался на динамический метод использования крутильных весов, то задача измерения гравитационного взаимодействия масс свелась к определению частот крутильных колебаний системы при двух положениях притягивающих масс. Вычисление значения f было сопряжено с той трудностью, что в процессе колебаний изменялось расстояние и направление масс крутильной системы относительно притягивающих цилиндров. Это приводило к необходимости учитывать нелинейность момента сил притяжения в дифференциальном уравнении, описывающем колебание. Влияние нелинейности Хейл учитывал введением соответствующей поправки в период крутильных колебаний.

Использование Хейлом притягивающих масс в виде прямых круговых цилиндров было необычным по сравнению с предшествующими опытами. Для вывода выражения момента сил притяжения, создаваемого круговым цилиндром конечной длины, он представлял потенциал притяжения цилиндров в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$V(P) = 2\pi f z a c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \left(\frac{a}{c} \right)^{2n+1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^{2n-1} \theta P_{2n}(\cos \theta) d\theta,$$

где P — точка, в которой рассматривается потенциал притяжения, a — радиус кругового цилиндра, c — расстояние точки P от его оси, σ — плотность, $P_{2n}(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, θ_1 и θ_2 — пределы интегрирования, которые зависят от длины цилиндра.

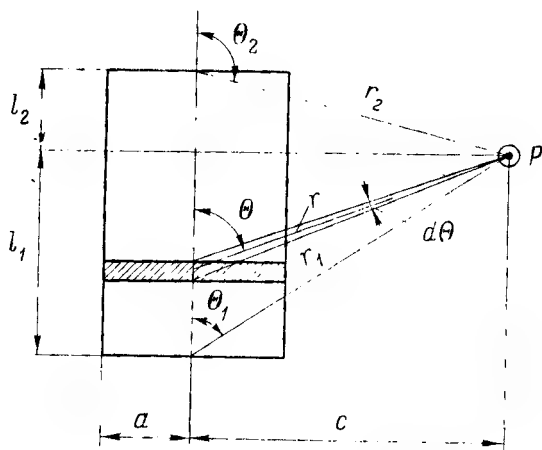


Рис. 9. Схема обозначений для цилиндрической притягивающей массы.

Интегрируя выражение для потенциала притяжения и переходя к линейным параметрам l_1 , l_2 , a , r_1 , r_2 , c (рис. 9), характеризующим размеры цилиндра и положение точки P , Хейл выводит уравнение для компоненты силы притяжения в направлении c , которое затем уже используется им для вывода изменений момента силы притяжения $(\mathfrak{M}'_{\text{пр}}(0))^I$ и $(\mathfrak{M}'_{\text{пр}}(0))^{II}$. В дифференциальном уравнении крутильных колебаний Хейла отсутствовало слагаемое, обусловленное сопротивлением воздуха и внутренним трением крутильной нити, учитывающее затухание колебаний. Хейл учитывал влияние затухания на период колебаний крутильной системы, но делал это довольно искусственно.

При построении теории Хейл предполагал, что крутильная система симметрична относительно оси крутильной нити и расположена симметрично относительно

притягивающих круговых цилиндров. Для выполнения последнего условия проводилась центрировка крутильной системы в трех направлениях (азимутальном, продольном и поперечном). Азимутальная юстировка проводилась путем отыскания такого среднего положения крутильной системы по азимуту, когда период ее крутильных колебаний минимальный. В результате азимутальной юстировки (рис. 10, а) направление неподвижного коромысла крутильной системы становится параллельным плоскости, проходящей через оси круговых цилиндров. Продольная юстировка обеспечивала равенство расстояний оси крутильной нити до осей обоих круговых цилиндров. Путем поперечной юстировки (рис. 10, б) добивались того, что ось крутильной нити оказывалась в плоскости, проходящей через оси круговых цилиндров.

Линейные измерения производились дважды — перед началом и после окончания работ. Точность

измерения горизонтальных расстояний была порядка 0,001 см, а вертикальных — 0,01 см. Взвешивание осуществлялось с относительной точностью порядка 10^{-5} — 10^{-6} . Как показало повторное взвешивание золотых шаров, их масса слегка изменилась вследствие адсорбции ртути, которая использовалась в манометре для измерения плотности воздуха в приборе. Разделенные по времени семью месяцами взвешивания показали, что вес одного шара увеличился на 0,0097 г, а другого — на 0,0159 г. Обнаруженное изменение масс Хейл равномерно распределил по времени. Для платиновых и стеклянных шаров какого-либо определенного изменения масс Хейл не установил.

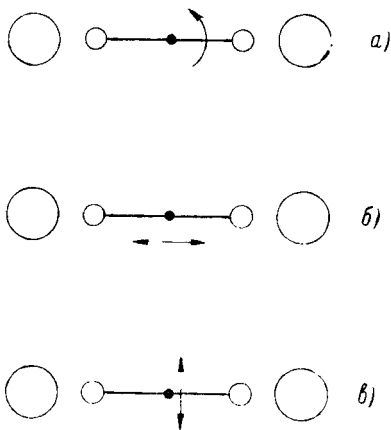


Рис. 10. Схемы юстировок прибора Хейла при определении постоянной тяготения: а) азимутальная, б) продольная, в) поперечная.

Обработка результатов вследствие многочисленности серий наблюдений оказалась очень трудоемкой. Ниже, в табл. 6 приведены результаты определений постоянной тяготения из описанных опытов Хейла. Придав веса средним значениям f (значению f , соответствующему золотым

Таблица 6

Материал притяги- ваемых масс	Средние значения постоянной тяготения f из серии опытов, 10^{-11} м ³ /кг·сек ²						Среднее значение f и средняя квадратическая ошибка
Золото	6,683	6,681	6,676	6,678	6,679	6,672	$6,678 \pm 0,003$
Платина	6,661	6,661	6,667	6,667	6,664	—	$6,664 \pm 0,002$
Стекло	6,678	6,671	6,675	6,672	6,674	—	$6,674 \pm 0,002$

массам, вес равный $1/3$, а платиновым и стеклянным массам — по 1), Хейл получил среднее значение постоянной тяготения $f = (6,670 \pm 0,005) \cdot 10^{-11}$ м³/кг·сек².

Отклонение от среднего различных значений f , соответствующих разным материалам масс крутильной системы, в два раза больше, чем средняя квадратическая ошибка среднего результата для одного материала. Это различие значений постоянной тяготения Хейл приписывал возможному влиянию магнитного поля на притягиваемые массы: золото — диамагнитно, а платина — парамагнитна. Отметим, что уже в опытах Этвеша была показана с относительной точностью $6 \cdot 10^{-9}$ независимость получаемых значений постоянной тяготения от материала притягивающихся масс. Но так как Этвеш опытов со стеклом не делал, то по поручению Хейла такие опыты выполнил Кук. Он показал, что с относительной точностью до $3,6 \cdot 10^{-8}$ нет различия для стекла и платины.

Результаты Хейла согласовывались между собой не вполне удовлетворительно, поэтому возникла необходимость в постановке новых измерений для определения постоянной тяготения. Спустя 10 лет Хейл вновь вернулся к проблеме определения постоянной тяготения. В новых работах Хейлу помогал Хржановский.

§ 15. Определения постоянной тяготения Хейлом и Хржановским

Прежде чем приступить к новым сериям опытов, Хейл и Хржановский провели большие вспомогательные исследования, которые позволили установить оптимальные значения для ряда параметров нового прибора. Задавшись целью увеличить чувствительность прибора, они, во-первых, уменьшили величину постоянной крутильной нити, во-вторых, увеличили момент сил притяжения масс.

В качестве нити были применены как отожженная ($\phi = 35 \text{ мк}$) так и неотожженная ($\phi = 30 \text{ мк}$) вольфрамовые нити однометровой длины. По упругим последствием вольфрамовая нить не уступает нити из плавленого кварца, а на разрыв она в 2—3 раза прочнее. Отожженная нить оказалась по своим упругим свойствам более стабильной, чем нить, полученная жесткой протяжкой без последующего отжига. Но зато последняя при той же прочности на разрыв (обе нити разрывались при нагрузке 280—290 г), будучи более тонкой, позволяла существенно увеличить чувствительность прибора. Периоды колебаний крутильной системы с нитью из отожженной проволоки составили 1880° и 1640° при дальнем и ближнем положениях притягивающих масс соответственно. Для нити же из проволоки, полученной жесткой протяжкой, период увеличивался соответственно до 2920° и 2200° . Экспериментаторы пробовали использовать бифилярный подвес для крутильной системы с расстоянием между нитями подвеса 0,5 мм. Однако система оказалась неустойчивой в работе. Измерения с нею в течение месяца показали, что случайные флуктуации периода были порядка $1/3000$ и поэтому в дальнейших опытах бифилярный подвес, так же как и подвес из нескольких скрученных нитей, не использовался.

В опытах 1942 г. были предприняты попытки увеличить длину коромысла до 80 см. Однако возникла необходимость устранения изгиба коромысла под действием веса шаровых грузов на его концах. Дополнительных оттяжек или коромысла в виде фермы Хейл и Хржановский избегали, чтобы облегчить последующие расчеты, хотя

эффект притяжения коромысла притягивающими массами составлял всего 1% от притяжения шаров. Пришлось остановиться на алюминиевом трубчатом коромысле длиной 20 см и 0,5 см в диаметре. Общая масса коромысла составляла 5,7 г. Притягиваемые шаровые массы весом по 87 г изготавливались из платины и подвешивались на 4 см ниже уровня коромысла на тонкой вольфрамовой нити.

Авторы отказались также и от использования крестообразного коромысла с четырьмя шаровыми массами на его концах для увеличения чувствительности прибора, так как и в этом случае цель не достигается. Когда большие притягивающие массы находятся вблизи одной пары притягиваемых шаров, они будут далеко расположены от другой пары шаров коромысла. Эффекты притяжения частично нейтрализуются и тем больше, чем короче плечи крестовины. Нецелесообразной оказалась попытка устранить влияние на результат притяжения самого коромысла. Для этого его можно было бы изготовить в виде колеса, на ободе которого укреплялись бы притягиваемые шары. Но это привело бы к значительному увеличению нагрузки на крутильную нить, а следовательно, и к увеличению ее диаметра, т. е. к нежелательному уменьшению чувствительности крутильной системы. Можно было бы поступить иначе: определить период крутильных колебаний системы с двумя парами шаров различных масс в каждом из двух положений притягивающих масс. Получающиеся в результате такого опыта четыре периода принципиально позволяют исключить притяжение коромысла. Но возникает непреодолимая трудность — не удастся избежать нарушения упругих свойств подвесной системы при арретировании и смене шаров на коромысле. Заметим, что простое арретирование коромысла в опытах Хейла и Хржановского изменяло период на несколько секунд.

В опытах 1942 г. в качестве больших притягивающих масс также использовались стальные цилиндры весом по 66 кг. Если ранее они располагались вертикально, то теперь — горизонтально (рис. 11). Такое расположение облегчило процесс измерения расстояний между крутильной системой и цилиндрами. Авторы тщательно юстиро-

вали прибор, добиваясь симметричного положения больших цилиндрических масс и крутильной системы. Необходимо было добиться установки цилиндров с точностью до $\pm 0,01$ см, что не составило большого труда, поскольку сами они изготовлялись с точностью $\pm 0,001$ см. Коромысло крутильной системы регулировалось по азимуту, продольному и поперечному направлениям с точностью до $\pm 0^{\circ},01$ и $\pm 0,01$ см соответственно. Первоначальная юстировка периодически проверялась и обнаруженные изменения учитывались в расчетах. Все измерения обычно проводились в ночное время, когда влияние микросейсм было наименьшее.

Корпус прибора изготовлялся из различных материалов. Маятниковый ящик и его крышка были сделаны из мягкого железа для магнитной защиты. Нить крутильной системы подвешивалась в латунной трубе. Притягивающие массы устанавливались на стальном кольце, которое на шариках каталось по другому кольцу, что позволяло легко осуществлять перемещение притягивающих масс. Колебание крутильной системы происходило при давлении 0,5 мм рт. ст. Дальнейшее разрежение воздуха не имело практического смысла, так как над силами сопротивления остающегося воздуха превалируют силы внутреннего трения в нити крутильной системы.

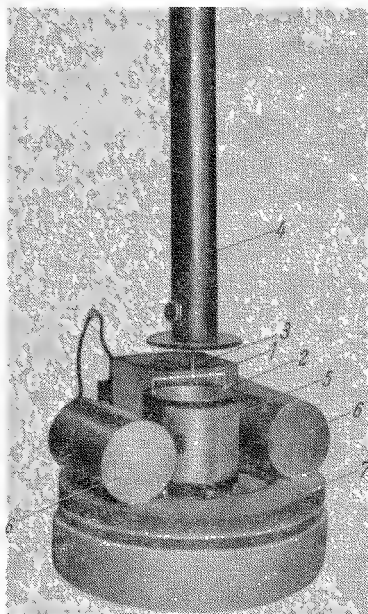


Рис. 11. Общий вид прибора Хейла и Хржановского.

1 — коромысло крутильной системы, 2 — притягиваемые массы, 3 — нить, 4 — ее кожух, 5 — корпус крутильной системы, 6 — притягивающие массы, 7 — диск, с помощью которого поворачивались притягивающие массы, 8 — кран для вакуумирования.

В отличие от предыдущих экспериментаторов, авторы применили фотографический метод регистрации колебания маятников, который обладает большей документальностью и позволяет производить последующую переобработку материалов наблюдений. Кроме того, фотографическая запись колебаний необходима для определения

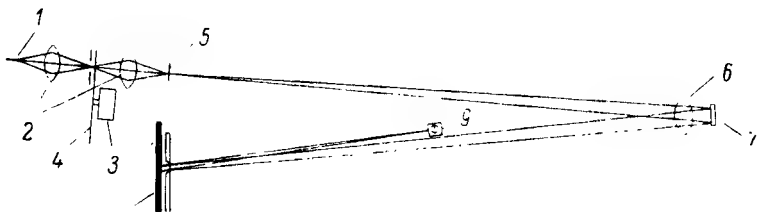


Рис. 12. Схема фотографической регистрации в приборе Хейла и Хржановского.

1 — источник света, 2 — конденсоры, 3 — синхронный мотор, 4 — вращающийся диск с прорезями, 5 — вертикальная щель, 6 — длиннофокусный объектив, 7 — зеркало коромысла весов, 8 — фотолампа, 9 — неоновая лампа.

амплитуды колебания и редукции периода колебаний к бесконечно малой амплитуде. Фоторегистрация в комбинации с дистанционным управлением позволяет избежать влияния наблюдателя на работу прибора. В качестве отметок времени в регистрирующей аппаратуре использовались световые вспышки, следующие через каждые 5 сек. Они получались вращением диска с радиальными разрезами, следующими через каждые 30° ; для минутных отметок один разрез был пропущен. Диск вращался со скоростью 1 оборот в минуту с помощью синхронного мотора, питаемого током со стандартной частотой в 50 гц. Эта частота получалась от кварцевых часов радиолаборатории Национального Бюро стандартов путем ее многократного деления. Стандартная частота держалась с относительной точностью порядка 10^{-7} .

Оптическая система прибора имела следующее устройство (рис. 12). Свет от 200-ваттной проекционной лампы фокусировался на узкой щели вблизи вращающегося диска. Щель находилась в фокусе объектива, так что пройдя объектив, свет падал параллельным пучком на зеркало, укрепленное на коромысле крутильной сис-

темы. Отразившись от зеркала, свет фокусировался объективом на фотопластинку, которая двигалась вместе с кассетой. Расстояние от зеркала коромысла до фотопластинки составило 490 см, так что отклонение коромысла на 1° соответствовало смещению светового блика на 17 см. В более поздних опытах 1942 г. оптическая система была улучшена и изображения щели на фотопластинке получались более четкими. Для фоторегистрации использовались фотопластинки размером 4×5 дюймов с панхроматической эмульсией. На одной пластинке записывалось 80 проходов. Ограниченность размеров фотопластинок была вызвана тем, что авторы располагали измерительным микроскопом для измерения длины не более 10 см.

Вся аппаратура была установлена в павильоне, специально выстроенном для этих работ в лесной части парка Бюро стандартов. Стены павильона были изготовлены из листовой стали с тепловой изоляцией. Внутри павильона применялось принудительное термостатирование с электрическим обогревом. Внутреннее помещение павильона разделялось на две комнаты. В одной из них устанавливался прибор для определения постоянной тяготения, а в другой — фоторегистрирующая аппаратура.

Теория прибора для определения постоянной тяготения в опытах Хейла и Хржановского мало чем отличалась от теории, использовавшейся первым из них в предыдущей работе [56].

Таблица 7

Вольфрамовая нить	Значения постоянной тяготения, $10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг} \cdot \text{сек}^{-2}$						Среднее значение f и средняя квадратическая ошибка. $10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг} \cdot \text{сек}^{-2}$
Неотожженная	6,6739	6,6756	6,6769	6,6762	6,6751	6,6755	$\pm 0,0003$
Отожженная	6,6670	6,6667	6,6703	6,6707	6,6680	6,6685	$\pm 0,0016$

В итоге Хейл и Хржановский получили значения постоянной тяготения, приводимые в табл. 7. Как видно, результат с неотожженной крутильной нитью имеет вдвое лучшую внутреннюю сходимость, чем в случае отожжен-

ной нити. Придавая различные веса полученным значениям, авторы выводят следующее значение постоянной тяготения $f = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$. Различие значений постоянной тяготения, соответствующих отоженной и неотоженной нитям, осталось необъясненным. Это различие выходило за пределы средних квадратических ошибок определений значений постоянной тяготения для каждой из нитей. По сравнению с предыдущей работой, в этом исследовании ценой больших дополнительных усилий авторы добились лишь незначительного увеличения точности результата. В итоге Хейли и Хрижановский пришли к заключению, что в работе 1942 г. ими достигнут предел возможностей определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов.

§ 16. Анализ результатов всех определений постоянной тяготения с помощью крутильных весов

Подведем некоторые итоги результатов определений постоянной тяготения f и средней плотности Земли $\sigma_{\oplus}$ с помощью вертикальных крутильных весов. Но прежде чем приступить к анализу числовых значений названных постоянных, остановимся на сравнительной характеристике применявшихся методик и приборов. В табл. 8 приведена сводка некоторых основных характеристик вертикальных крутильных весов, описанных в настоящей главе. Обратим внимание на некоторые обстоятельства.

Начатая работами Корню и Бейля и затем продолженная Бойсом тенденция создания миниатюрной аппаратуры для определения постоянных f и $\sigma_{\oplus}$ не получила своего развития. Аппаратура последнего времени имела коромысла крутильной системы длиной в несколько десятков сантиметров, притягиваемые массы весом в сотни граммов, а притягивающие — в несколько десятков килограммов. Относительная точность измерений длин и масс порядка $10^{-5} - 10^{-6}$ может быть достаточно просто обеспечена именно при таких параметрах прибора. Температурная однородность такого объема также легко осуществима.

Положительным моментом в осуществленных опытах было разнообразие материала притягивающихся масс.

Таблица 8

Автор и место проведения опыта	Год публикации	Длина коромысла, см	Материал притягиваемых масс и их вес, г	Материал притягивающих масс, их форма и вес, кг	Период свободных колебаний притянутой системы, сек	Давление, при котором протопились крутильные колебания (а — атмосферное)	Метод**
Кавендиш (Клэпхэм, Англия)	1798	182	Свинец, по 730 г	Свинц. шары по 158 кг	430, 890	а	с
Райх (Фрейбург, Германия)	1838 1852	202	Свинец, цинк висмут железо; по 484 г	Свинц. шары по 45 кг; чугунные шары по 30 кг	440, 500 700 800	а	с д
Бейли (Тависток Плейс, Англия)	1843	196	Платина, свинец, цинк, стекло, латунь, слоновая кость, по 116—1538 г	Свинц. шары по 172,4 кг	93,5—550	а	с
Корню и Бейль (Париж, Франция)	1873 1878	50	Медь, по 109 г	Ртуть, заполнявшая шарообразные сосуды, 12 кг	400	а	с
Бойс (Оксфорд, Англия)	1895	2,3	Золото; по 1,32 г, 2,65 г, 3,98 г	Свинц. шары по 7,4 кг	80	а. неудачная попытка наблюдать в водородной среде	с
Этвеш (Будапешт, Венгрия)	1896	—	—	Свинцовые параллелепипеды; по 600 кг	120 *) 750	а	д
Браун (Мариенштайн, Австрия)	1897	24,6	Латунь, по 54 г	Ртуть, заполнявшая шарообразные сосуды, по 9 кг	46 *) 1200	4 мм рт. ст. 17 мм рт. ст.	с.д
Хейл (Вашингтон, США)	1930	20,6	Золото, платина, стекло, по 50 г	Стальные круговые цилиндры, по 66 кг	327 *) 1920	2 мм рт. ст.	д
Хейл и Хржановский (Вашингтон, США)	1942	20	Платина, по 87 г	Стальные круговые цилиндры, по 66 кг	240 720 *) 1760 — 2160	0,5 мм рт. ст.	д

*) В знаменателе указан средний период свободных колебаний притянутой системы, а в числителе — разность периодов при продольном и поперечном положениях притягивающих масс.

**) с — статистический, д — динамический.

Особенно далеко в этом отношении пошел Бейли, применив платину, свинец, цинк, стекло, латунь, слоновую кость. Опыты Хейла 1930 г. были проведены с массами, изготовленными из золота, платины, стекла. Использование различных материалов первоначально преследовало цель показать, что гравитационное взаимодействие между телами зависит не от их материала, а только от массы. Однако разнообразие материалов притягивающихся масс с этой целью в подобных опытах неразумно, так как задача исследования гравитационного взаимодействия между различными веществами может быть гораздо точнее исследована в специальных опытах, как это сделал Этвеш, достигший высокой точности. Конечно, в каждом новом опыте с крутильными весами, в которых варьируются веса и размеры, состав притягивающихся масс продолжает иметь существенное значение для исключения различных систематических ошибок.

В значительной степени успех опытов с вертикальными крутильными весами зависит от стабильности упругих свойств крутильной системы. Упругая сила закрученной нити является той эталонной силой, с которой сравнивается измеряемая сила гравитационного взаимодействия масс. Хотя опыты Хейла и Хржановского выполнены с большим вниманием к упругим свойствам крутильной нити, тем не менее в результатах и их опытов видна систематическая ошибка, соответствующая отоженной и неотоженной вольфрамовым нитям (см. табл. 7). Систематическая ошибка в несколько раз превосходит среднюю квадратическую ошибку определения с каждой из названных нитей. В этой связи следует для исключения систематических ошибок, связанных со свойствами крутильной нити, проводить опыты со сменными нитями разной длины и толщины и из разных материалов.

Известно, что чувствительность крутильной системы характеризуется периодом ее собственных колебаний. Как видно из табл. 8, для достижения высокой чувствительности период собственных колебаний крутильной системы в последних приборах доведен до 2500 сек. Это достигается увеличением длины крутильной нити и уменьшением ее диаметра. Однако увеличение чувствительности путем уменьшения диаметра нити ограничено преж-

де всего требованием сохранения ее прочности на разрыв. Более того, нить крутильной системы должна иметь достаточно большой запас прочности и находиться в мало напряженном состоянии. В противном случае нет основания считать, что ее упругие деформации при закручивании подчиняются линейному закону Гука, принимаемому в теории всех описанных опытов. Кроме того, под действием больших напряжений в нити могут возникнуть остаточные деформации, а под действием ползучести материала нити изменяется с течением времени исходное равновесное положение крутильной системы. Последнее приводит, как хорошо известно из инструментальной гравиметрии, к так называемому «сползанию нуля-пункта прибора».

В опытах Хейла и Хржановского 1942 г. нить крутильной системы имела только двойной запас прочности на разрыв, т. е. находилась в сильно напряженном состоянии, что вряд ли являлось оправданным. Следовало бы поступиться чувствительностью крутильных весов в угоду стабильности упругих свойств нити. Вопрос выбора оптимальных соотношений чувствительности крутильных весов, толщины, длины и материала нити требует еще дополнительного теоретического и экспериментального изучения.

Заканчивая анализ данных табл. 8, отметим разработку в последнее время динамического метода определения постоянной тяготения, вытесняющего статический метод. Динамический метод обладает тем достоинством перед статическим, что в нем можно достичь большой чувствительности прибора за счет уменьшения роли трения в крутильной системе. Однако в динамическом методе возникает необходимость регистрации точного времени. Затруднение в регистрации времени состоит в том, что крутильная система в своем колебательном движении перемещается очень медленно. Так, притягиваемая масса на конце коромысла в приборе Хейла и Хржановского при амплитуде колебания 2° при своей наибольшей скорости перемещалась за 1 секунду на 10 мк , следовательно, если мы сумеем регистрировать положение конца коромысла с точностью 1 мк , то момент времени будет известен с точностью $0,1$ секунды. Для определения постоянной

тяготения необходимо измерить с относительной точностью порядка 10^{-5} разность периодов колебаний крутильной системы, соответствующих двум разным положениям притягивающих масс. Определить с такой точностью разность периодов при динамическом способе не просто, ибо возрастают трудности точной регистрации расстояний между притягивающимися массами. Но все же, по видимому, достоинство динамического способа — его большая чувствительность — окупает недостатки.

Теперь остановимся на приведенных в табл. 9 значениях постоянных тяготения и средней плотности Земли, а также на оценке точности их определений. В таблице даны значения f и $\sigma_{\oplus}$, специально выведенные после анализа опубликованных материалов, поэтому они отличаются от соответствующих значений оригинальных работ авторов. Мы сочли возможным объединить результаты определений средней плотности Земли, полученные Райхом в 1838 и 1852 гг., так как эти два опыта, разделенные 14-ю годами, методически мало различались, если не считать некоторой модернизации аппаратуры. Все многочисленные данные опытов Бейли, продолжавшихся много лет, с разнообразными притягивающими массами и нитями, следует объединить в единый результат. Опыты Корню и Бейля 1873 г. и 1878 г. также представлены одним результатом, так как в обеих сериях наблюдений использовалась одна и та же аппаратура и методика.

Как показывает табл. 9, различия значений постоянной тяготения или средней плотности Земли, определенных разными авторами, часто многократно превосходят среднюю квадратическую ошибку определения каждого из приведенных значений. Это говорит о том, что в полученных значениях содержатся систематические ошибки. Для примера рассмотрим средние значения постоянной тяготения, определенные Хейлом в 1930 г. с тремя различными притягиваемыми массами (см. табл. 6), и значения постоянной тяготения, соответствующие различным нитям крутильной системы в опытах Хейла и Хржановского 1942 г. (см. табл. 7). При средней квадратической ошибке определения постоянной тяготения в каждой серии табл. 6, равной $\pm 0,003 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$, различие между значениями f , соответствующими этим сериям,

Т а б л и ц а 9

Автор	Год опубли- кования	Значения постоянной тяготения f и средняя кватратическая ошибка. 10^{-11} лр ³ /кг·сек ²	Средняя плотность Земли σ_D и средняя кватратическая ошибка, г/см ³	Источник, из которого заимствованы значения $\sigma_{\oplus}$ и f и замечания об их выводе
Кавендиш	1798	$6,74^*) \pm 0,05$	$5,45 \pm 0,04$	[29] после исправления Бейли ошибки, полученной Кавенди- шем при выводе среднего значения
Райх	1838 1852	$6,63^*) \pm 0,06$	$5,54 \pm 0,05$	Среднее из результатов опыта 1852 г. и результатов [86] исправленных самим Райхом [86]
Бейли	1843	$6,62^*) \pm 0,07$	$5,55 \pm 0,05$	[46] после исправления Корню и Бейлем
Корню и Бейль	1873 1878	$6,63^*) \pm 0,017$	$5,54 \pm 0,014$	Среднее из результатов опытов 1873 г. [44] и 1878 г. [46]
Бойс	1895	$6,658 \pm 0,007$	$5,527 \pm 0,006$	[34]
Этвеш	1896	$6,657 \pm 0,043$	$5,520^*) \pm 0,010$	[50]
Браун	1897	$6,685^*) \pm 0,002$	$5,529 \pm 0,002$	[35]
Хейл	1930	$6,670 \pm 0,005$	$5,546^*) \pm 0,004$	[56]
Хейл и Хржановский	1942	$6,673 \pm 0,003$	$5,549^*) \pm 0,003$	[58]

*) Значения $\sigma_{\oplus}$ и f вычислены нами с помощью формулы (16) по соответствующим значениям f и σ_D найденным указанными авторами из опыта. При расчетах было принято $\gamma_c = 978,04$ см/сек², $a = 6378,2 \cdot 10^3$ см, $e^2 = 0,0067$, $\beta_1 = 0,00653$, величинами ω^2 и β_2 мы пренебрегли ввиду их малости.

достигает $0,014 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$. Те же средние значения f в табл. 7 различаются на $0,007 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$, в то время как из серии опытов с каждой из нитей f определяется со средней квадратической ошибкой, в несколько раз меньшей, чем эта разность. Поэтому важно при постановке опытов для исключения ряда систематических ошибок осуществлять разнообразие масс и нитей крутильной системы.

Очень важно также сочетать статический метод с динамическим. К сожалению, имеется мало материала для сравнительной оценки этих методов. Результаты Брауна по сходимости значений f , определенных статическим и динамическим способом, можно считать превосходными, так как различие между методами укладывается полностью в пределы средней квадратической ошибки определения f в серии каждого из методов. Но делать на основании опытов Брауна вывод об отсутствии систематических ошибок, присущих каждому из этих способов, было бы неправильным. Более того, мы склонны думать, что для более полного исключения систематических погрешностей в значениях постоянной тяготения необходимо использовать не только метод крутильных весов, но и другие методы (метод вертикальных весов Йолли, резонансный метод и др.).

Подводя итог настоящей главе, выразим свое отношение к конкретным значениям постоянной тяготения и средней плотности Земли, выведенным различными авторами. По-видимому, опыты Кавендиша, Райха, Бейли, Корню и Бейля, Бойса, Этвеша представляют только исторический интерес. Значение же постоянной f , полученное Брауном, стоит по точности определений несравненно выше. Оно хуже, чем последнее измерение постоянной тяготения, выполненное Хейлом и Хржановским, но приближается к ним как по точности, характеризуемой чисто формальным показателем — средней квадратической ошибкой, так и по существу опыта. Нам представляется, что наиболее близка к действительности величина, выведенная на основании опытов Хейла и Хржановского.

Когда рукопись настоящей книги уже была написана, автору стало известно о начавшихся новых экспериментах по определению постоянной тяготения.

По инициативе Л. Эдьеда под руководством ученика Этвеша Я. Реннера *) в Будапештском университете в 1966 г. начались работы по новому определению постоянной тяготения. Крутильная система имеет алюминиевое коромысло длиной 21 см, которое подвешивалось на вольфрамовой нити толщиной 12 мк. На концах коромысла крепились свинцовые шары по 16 г. Система помещалась в чугунный корпус, который одновременно выполнял роль магнитного экрана. На поворачивающемся вокруг корпуса кольце устанавливались четыре одинакового размера и веса полых цилиндра. Два противоположных цилиндра заполнялись 17,5 килограммами ртути. Применялась фотографическая регистрация колебаний. Пока получены предварительные результаты, показывающие, что точность опытов лимитируется точностью регистрации времени, которое в предварительных опытах Реннера определялось по маятниковым часам.

Новый эксперимент по определению постоянной тяготения с помощью крутильных весов готовится в Институте геодезии и геофизики в Триесте совместно с Национальной физической лабораторией в Теддингтоне **). Авторы надеются использовать крутильную систему со 100-метровой крутильной нитью, чтобы создать большую чувствительность прибора. Пробные массы на коромысле весов шаровой формы из сплава меди с алюминием весят по 10 кг, а притягивающие массы цилиндрической формы будут весить по 500 кг. Предполагается иметь вакуум порядка 2—3 мм рт. ст. Для регистрации будет применен лазерный луч. Опыт будет проводиться в одном из гротов пещеры под Триестом, где высока стабильность температуры и мало влияние микросейсм.

*) Я. Р е н н е р, Новое определение гравитационной постоянной, препринт, 1968.

**) Доклад проф. А. Марусси на Московском гравиметрическом семинаре 8 июня 1968 г.

Определения постоянной тяготения из опытов с вертикальными весами

§ 17. Опыты Йолли по определению средней плотности Земли

При определении постоянной тяготения по величине силы притяжения между взаимодействующими массами для измерения должна использоваться некоторая сила сравнения. В опытах Кавендиша и др. такой силой сравнения являлась упругая сила нити крутильной системы. Между тем для этих целей может быть использована любая другая сила, лишь бы она была относительно стабильна во времени. Такой силой сравнения, например, может быть сила тяжести. Так, в опытах Бугера — Маскелайна и др. сила притяжения одиноко расположенной горы сравнивалась с силой тяжести путем измерения отклонения отвеса (тангенс угла отклонения отвеса равен отношению горизонтальной составляющей притяжения горного массива к силе тяжести в данном месте). В опытах Эри, Штернека и др. использовалась в качестве силы сравнения тоже сила тяжести, но направление измеряемой силы притяжения слоя масс совпадало с направлением силы тяжести.

К идее сравнения силы притяжения между небольшими массами с силой тяжести вновь вернулся в семидесятых годах прошлого столетия профессор Ф. Йолли (1809—1884) из Мюнхена. В 1878 г. он публикует ряд наблюдений с первым вариантом своих вертикальных весов [64]. В качестве притягиваемых масс использовались покрытые никелем латунные килограммовые грузы. Ко времени постановки опытов Йолли усовершенствование весов достигло такой степени, что с помощью их можно было две однокилограммовые массы сравнивать с точностью до 1 мг.

В своем последнем варианте весы Йолли [65] были смонтированы в верхней части одиноко стоящей башни, предоставленной для опыта Мюнхенским университетом. Весы имели коромысло длиной 60 см и весом 724 г. На концах коромысла (рис. 13) с каждой стороны подвешивалось по две пары чашек весов, отстоящие друг от друга по высоте на $h = 21,005$ м. К коромыслу в средней части крепилась стальная трехгранная призма, одним ребром которой она опиралась на агатовую площадку. Для регистрации положения коромысла имелось зеркало, а на расстоянии 3,5 м от него располагалась вертикальная шкала с миллиметровыми делениями.

На весах взвешивалась ртуть, помещенная в сферические колбы. Для исключения влияния потери веса в воздухе при взвешивании на различных уровнях были изготовлены четыре стеклянные колбы одинакового веса и объема. Две колбы заполнялись 5 кг ртути, а две другие оставались пустыми. Все четыре колбы запаивались.

Методика опытов Йолли состояла в следующем. Обе наполненные ртутью колбы помещали на верхние чашки весов, порожние — на нижние. Весы уравнивались. Затем одна из наполненных колб менялась местами с соответствующей пустой колбой. Приближение массы ртути к центру Земли увеличивало ее вес, и для уравнивания весов требовалось добавить дополнительную массу на противоположную чашу весов. Эта добавочная масса была определена из 50 измерений и составляла $P = 31,686$ мг.

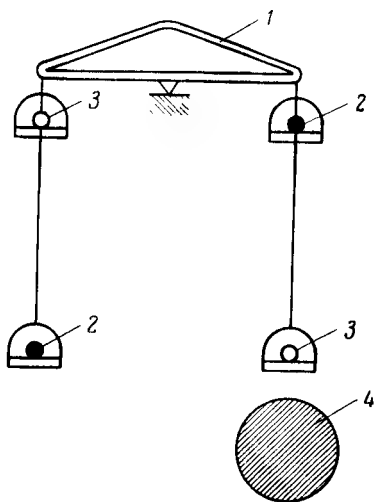


Рис. 13. Схема вертикальных весов Йолли.

1 — коромысло весов, 2 — притягиваемые массы в виде ртути, заполняющие стеклянные колбы, 3 — полые стеклянные колбы, 4 — притягивающая масса.

Для положения равновесия весов с порожней колбой можно написать следующее уравнение:

$$Pg = m \frac{\partial g}{\partial h} h, \quad (31)$$

где m — масса колбы со ртутью, g — ускорение силы тяжести на уровне верхней чашки весов, $\partial g / \partial h$ — вертикальный градиент ускорения силы тяжести, h — расстояние между верхней и нижней чашками весов, P — упомянутая выше дополнительная уравнивающая масса на верхней чашке весов. Предполагается, что нет горизонтального градиента плотности воздуха на каждом из высотных уровней. Плечи коромысла весов, а также массы колб со ртутью и без нее считаются соответственно одинаковыми.

Затем под нижние чашки весов помещался свинцовый шар, радиус которого $\rho = 0,4975$ м, а масса $M = 5775,2$ кг. Под действием разности притяжений свинцовым шаром колб со ртутью, расположенных на различных уровнях, нарушается равновесие весов. Для его восстановления необходимо добавить еще дополнительную массу, как оказалось, равную $q = 0,589 \pm 0,007$ мг. Уравнение равновесия при введении свинцового шара имеет вид

$$(P + q)g + mG_1 = m \frac{\partial g}{\partial h} h + mG_2, \quad (32)$$

где G_1 и G_2 — соответственно ускорения силы притяжения свинцового шара на уровне верхней и нижней чашки весов. Из уравнений (31) и (32) можно получить соотношение, связывающее силы притяжения свинцового шара с ускорением силы тяжести g

$$g = \frac{mG_2 - mG_1}{q}. \quad (33)$$

Пренебрегая сжатием и вращением Земли, Йолли получил для средней плотности Земли $\sigma_{\oplus}$ следующее выражение через силу тяжести g , радиус Земли R и постоянную тяготения f :

$$\sigma_{\oplus} = \frac{3g}{4\pi f R}. \quad (34)$$

Ускорение силы притяжения свинцового шара равно

$$G_2 = \frac{fM}{r^2} \quad \text{и} \quad G_1 = \frac{fM}{(r+h)^2}, \quad (35)$$

где r — расстояние между центрами свинцового шара и колбы со ртутью на нижней чашке весов, равное 56,86 см. Так как расстояние от свинцового шара до верхних колб в 43 раза больше, чем до нижних, то ускорение силы притяжения G_1 колбы со ртутью, расположенной на верхней чашке весов, будет в 43^2 раза меньше, чем ускорение силы притяжения нижних колб со ртутью. Эта величина лежит за пределами точности измерений в приборе Йолли.

Подставляя написанные выражения для G_1 и G_2 (35) в равенство (33), а затем в выражение (34), получим формулу для определения средней плотности Земли:

$$\sigma_{\oplus} = \frac{3M}{4\pi q R} \left[\frac{m}{r^2} - \frac{q}{(r+h)^2} \right].$$

Конечно, в этой формуле много упрощений: не учитывались различия масс ртутных колб, расстояний, притяжения коромысла и т. д. Но она позволяет понять принцип определения средней плотности Земли методом Йолли.

Работы Йолли были проведены с довольно большой тщательностью, и, я бы сказал, даже с некоторой педантичностью. Наблюдения начинались строго в 9^h00^m утра, когда в окрестности прибора были наименьшие температурные изменения; в 11^h00^m производилась перестановка колб со ртутью и т. д. Для определения массы свинцового шара Йолли тщательно измерял его радиус с помощью некоторого специального приспособления. Средняя плотность шара определялась как среднее из 155 пробных образцов и равнялась 11,186 г/см³.

Йолли подробно исследовал влияние температуры на показания весов, особенно на первых этапах своей работы [64]. Поскольку никакого термостатирования прибора не было и башня не могла быть хорошо теплоизолирована, то изменение внешней температуры, иногда достигавшее 0°,1 в течение одного опыта, сказывалось на показаниях прибора. Определенные погрешности возникали также и из-за больших изменений влажности, поскольку бывали случаи, когда во время наблюдений влажность за

несколько часов менялась на 14%. Перестановка масс на чашках коромысла требовала арретирования прибора, что также отрицательно сказывалось на результатах, поэтому ряд авторов, впоследствии проводивших подобные эксперименты, избегали арретирования весов.

В результате экспериментов с описанной аппаратурой Йолли вычислил среднюю плотность Земли, которая получилась равной $\sigma_{\oplus} = 5,692 \text{ г/см}^3$. Основная погрешность в определении средней плотности Земли вызвана ошибками в измерениях величины добавочной массы q .

В заключение отметим, что опыты Йолли, помимо определения средней плотности, представляют интерес и для изучения вертикального градиента силы тяжести. Он произвел первые надежные непосредственные измерения этой величины. Йолли нашел, что ускорение силы тяжести в месте последних опытов изменяется с высотой с градиентом $295 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-2}$, что на $13 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-2}$ меньше среднего значения, вычисленного для Земли в целом. Причиной этого он, по-видимому справедливо, считал аномальность гравитационного поля в данном районе.

§ 18. Работа Пойнтинга по измерению постоянной тяготения

В 1878 г., почти одновременно с Йолли, знаменитый английский физик Д. Пойнтинг (1852—1914), бывший тогда профессором физики в Мэзон-колледже в Бирмингеме, опубликовал свою работу [80], посвященную определению постоянной тяготения. В упомянутой работе он приводит анализ возможности применения вертикальных весов для определения постоянной тяготения.

До Пойнтинга и Йолли постоянная тяготения и средняя плотность Земли в лабораторных условиях определялись только с помощью крутильных весов. Пойнтинг, как и Йолли, определял возрастание веса массы, подвешенной на одном конце коромысла весов, под действием притяжения поднесенной снизу большой притягивающей массы. В своих первых опытах Пойнтинг использовал в качестве притягивающей массы свинцовый шар весом в 154 кг, который притягивал другой взвешиваемый свинцовый шар весом 453 г. Упомянутая работа Пойнтинга

[80] носила предварительный характер. Со всей тщательностью Пойнтинг начал работу по определению средней плотности Земли в 1890 г. Результаты, опубликованные им

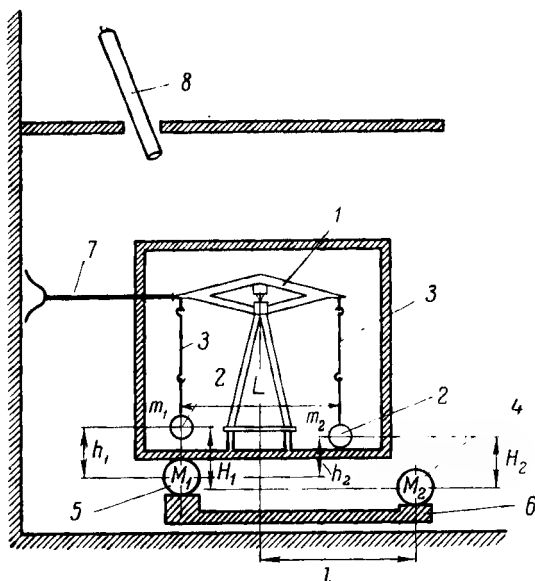


Рис. 14. Схема вертикальных весов Пойнтинга.

1 — коромысло весов, 2 — притягиваемые массы, 3 — стержни, на которых подвешиваются притягиваемые массы, 4, 5 — притягивающие массы, 6 — несущая притягивающие массы балка, 7 — устройство для дистанционного арретирования весов, 8 — телескоп.

в статье [81] и позже перепечатанные в его монографии [82], были в 1893 г. удостоены приза Адамса Кембриджского университета.

Прибор Пойнтинга, с которым он проводил опыты, имел коромысло длиной 123,26 см (в первом опыте 40 см) (рис. 14). В качестве притягиваемых масс m_1 и m_2 служили два шара по 21,6 кг. Изготовлены они были, так же как и притягивающие массы, из сплава свинца с сурьмой, имевшего плотность 10,4 г/см³. Предварительно материал, из которого изготавлиались шары, был подвержен давлению под прессом для устранения внутри пустот и

раковин. Притягивающих масс также шарообразной формы было две. Первая из них — M_1 — помещалась непосредственно под одной из притягиваемых масс. Веса она 153,4 кг. Другая притягивающая масса — M_2 , весившая 76,5 кг, находилась по другую сторону весов, на расстоянии 122,8 см от центра весов, в стороне от притягиваемой массы. Горизонтальная составляющая притяжения массы M_2 , действующая на массу m_2 , уравнивалась горизонтальной составляющей, вызываемой массой M_1 (рис. 14). Обе притягивающие массы M_1 и M_2 могли одновременно поворачиваться вокруг одной вертикальной оси с помощью специального устройства. При повороте на 180° масса M_1 , располагавшаяся под массой m_1 , оказывалась под массой m_2 , а масса M_2 переходила по другую сторону весов.

Разность притяжений взаимодействующих масс измерялась с помощью уравнивающих масс, помещаемых на коромысло весов. Такими массами служили рейтеры из серебряной проволоки, данные о которых при весе порядка 10 мг были известны с точностью $\pm 0,00001$ мг. Поскольку притягивающие массы действуют не только на подвешенные на коромысле массы, но и на само коромысло, подвесные стержни и т. д., то Пойнтинг использовал прием, исключаяющий притяжение последних. Для этого производились измерения притяжения масс m_1 и m_2 на двух различных уровнях. Изменение притяжения вызывалось при этом только приближением или удалением притягиваемых масс m_1 и m_2 к притягивающим массам M_1 и M_2 .

Для подвески масс m_1 и m_2 на различных уровнях имелись латунные стержни, вес которых составлял 1 : 100 часть веса притягиваемой массы. Масса подвешивалась к одному из концов стержня, а сам стержень на концах имел ушки, за каждое из которых его можно было попеременно подвешивать к коромыслу, так что притягиваемая масса оказывалась то на верхнем, то на нижнем уровне, причем разность высот составляла 48 см. Поскольку стержни были симметричными, то их переворачивание не нарушало равновесия весов.

Пойнтинг применил оригинальный двойной подвес зеркала для регистрации наклонов коромысла весов. Этот принцип регистрации был использован позже Дарвином в

его экспериментах по наблюдению лунно-солнечных вариаций силы тяжести. Указатель коромысла весов имел перпендикулярно направленный к нему рычаг. Зеркало было подвешено на двух нитях, верхний конец одной из которых скреплялся с концом рычага указателя весов, а верхний конец другой — с микрометрическим винтом, перемещающимся горизонтально. Микрометрический винт мог регулировать расстояние между верхними концами почти параллельных нитей, на которых было подвешено зеркало. Обычно расстояние между ними в опытах Пойнтинга было 3—4 мм. При наклоне коромысла весов указатель весов перемещал жестко связанный с ним рычаг, а последний — верхний конец одной нити подвеса зеркала в вертикальной плоскости, перпендикулярной к плоскости зеркала. Это немедленно приводило к повороту зеркала вокруг вертикальной оси. Угол поворота был тем больше, чем меньше становилось расстояние между нитями. Для регулировки чувствительности системы отсчета и служил микрометрический винт. Описанное устройство увеличивало угол поворота зеркала по сравнению с углом наклона коромысла весов в 150 раз, что позволило Пойнтингу регистрировать сотые доли секунды дуги.

Весы были помещены в ящик с теплоизолированными стенками, который устанавливался в подвале. Наблюдения производились из комнаты, расположенной над подвалом. В ней находилась зрительная труба и шкала с делениями для регистрации положения коромысла весов. Поворот притягиваемых масс на 180° осуществлялся дистанционно из наблюдательной комнаты. Температура в подвале отсчитывалась по термометру, каждый раз поднимавшемуся для этого в наблюдательную комнату. Температурный режим прибора был не вполне удовлетворительный, хотя автор указывает, что температурные изменения никогда не превышали $0^\circ,1$ за 2—3 часа. Пойнтинг исследовал расширение притягиваемых масс с изменением температуры. Оказалось, что для сплава свинца с сурьмой температурный коэффициент составлял величину порядка $1 : 40000$. Таким образом, эффекты, вызванные расширением масс, лежали за пределами точности измерений. Особые меры были приняты для устранения вибрации, которая была значительной, так как подвал, где ставились

опыты, находился в 20 м от улицы. Было обнаружено влияние на показания весов наклонов земной поверхности вследствие изменения барометрического давления. Пойнтинг тщательно рассмотрел вопросы затухания колебаний системы и при обработке наблюдений учитывал это обстоятельство.

Изложенная ниже теория способа определения постоянной тяготения с помощью вертикальных весов принадлежит Пойнтингу. Пусть (см. рис. 14) масса M_1 располагается под массой m_1 , а масса M_2 в стороне от массы m_2 . Это первоначальное положение масс при написании момента сил притяжения будем обозначать индексом «I». Момент сил притяжения массой M_1 масс m_1 и m_2 запишется так:

$$\mathfrak{M}_{M_1}^I = fM_1a \left(\frac{m_1}{h_1^2} - \frac{m_2h_2}{(h_2^2 + L^2)^{3/2}} \right). \quad (36)$$

Аналогично выражается момент сил притяжения массой M_2 :

$$\mathfrak{M}_{M_2}^I = fM_2a \left(\frac{m_1H_1}{(H_1^2 + (l + \frac{L}{2})^2)^{3/2}} - \frac{m_2H_2}{(H_2^2 + (l - \frac{L}{2})^2)^{3/2}} \right). \quad (37)$$

Здесь a — плечо коромысла весов, h_1 , h_2 , H_1 , H_2 , l и L — расстояния, значения которых очевидны из рис. 14.

Обозначим, кроме того, через $\mathfrak{M}_0$ момент сил притяжения, возникающий из-за притяжения массами M_1 и M_2 масс самого коромысла и масс латунных стержней, несущих массы m_1 и m_2 . Сумма названных трех моментов, действуя на весы, выведет их коромысло из положения равновесия. Весы уравнивались наложением дополнительных небольших масс. Обозначая уравнивающую массу через P_1 , имеем

$$\mathfrak{M}_{M_1}^I + \mathfrak{M}_{M_2}^I + \mathfrak{M}_0 = P_1gb, \quad (38)$$

где b — плечо действия дополнительной массы P_1 , g — сила тяжести, которая Пойнтингом вычислялась для Бирмингема ($\varphi = 52^\circ 28'$) по формуле нормального распределения силы тяжести с учетом превышения подвала над уровнем моря ($h = 135$ м).

При повороте притягивающих масс M_1 и M_2 на 180° масса M_1 оказывалась под массой m_2 , а масса M_2 в стороне от массы m_1 . Моменты сил притяжения, соответствующие этому положению масс, снабдим индексом «II». При втором положении масс коромысло вновь наклонится, но уже в противоположную сторону. Равновесие восстанавливается дополнительной массой P_2 :

$$\mathfrak{M}_{M_1}^{\text{II}} + \mathfrak{M}_{M_2}^{\text{II}} - \mathfrak{M}_0 = -P_2 gb. \quad (39)$$

Мы для краткости не записываем выражения моментов $\mathfrak{M}_{M_1}^{\text{II}}$ и $\mathfrak{M}_{M_2}^{\text{II}}$, которые имеют вид, аналогичный равенствам (36) и (37). Момент $\mathfrak{M}_0$ остается прежним, но только в новое равенство вида (39) он входит с обратным знаком. Вычитая из правой и левой частей равенства (38) соответствующие части равенства (39), получим

$$(P_1 + P_2) gb = \mathfrak{M}_{M_1}^{\text{I}} - \mathfrak{M}_{M_1}^{\text{II}} + \mathfrak{M}_{M_2}^{\text{I}} - \mathfrak{M}_{M_2}^{\text{II}} + 2\mathfrak{M}_0 = f\mathfrak{M}^{\text{I, II}} + 2\mathfrak{M}_0. \quad (40)$$

Сумма четырех первых моментов в правой части последнего равенства обозначена через $f\mathfrak{M}^{\text{I, II}}$. Не зная точной формы коромысла и стержней, Пойнтинг не вычислял момента $\mathfrak{M}_0$, а поставил целью исключить эту величину. Для этого он перемещал массы m_1 и m_2 по высоте, переворачивая, как уже указывалось выше, стержни, несущие массы m_1 и m_2 . Второе уравнение вида (40), соответствующее другому уровню расположения масс при том же моменте $\mathfrak{M}_0$, имело вид

$$(P_3 + P_4) gb = f\mathfrak{M}^{\text{III, IV}} + 2\mathfrak{M}_0, \quad (41)$$

где P_3 и P_4 — новые дополнительные уравновешивающие массы. Вычитая (41) из равенства (40), можно записать формулу для определения постоянной тяготения:

$$f = \frac{gb(P_1 + P_2 - P_3 - P_4)}{\mathfrak{M}^{\text{I, II}} - \mathfrak{M}^{\text{III, IV}}}.$$

В результате Пойнтинг получил следующее значение постоянной тяготения: $f = (6,70 \pm 0,04) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$

и соответствующее ему значение средней плотности Земли $\sigma_{\oplus} = (5,49 \pm 0,03) \text{ г/см}^3$. Хотя Пойнтинг и считал нереальной третью значащую цифру в результатах Бейли, сам же он сохранял пять, что также нереально.

§ 19. Модификация опыта с вертикальными весами в экспериментах Кёнига, Рихарца и Кригар-Менцеля

В 1884 г. сотрудники Физического института Берлинского университета А. Кёниг (1856—1901) и Ф. Рихарц (1860—1920) [68] решили усовершенствовать методику

Йолли определения средней плотности Земли с помощью чувствительных весов. Они предложили изменить положение большой притягивающей массы, а именно, расположить ее между верхними и нижними чашками весов (рис. 15). Это приводило к тому, что искомый эффект притяжения большой притягивающей массой M массы m , расположенной на чашке весов, увеличивался в четыре раза по сравнению с эффектом в опытах Йолли. Кроме того, методика Кёнига и Рихарца имеет еще и то преимущество, что более симметричное расположение масс и чашек весов относительно притягивающей массы приводит к более благоприятным ус-

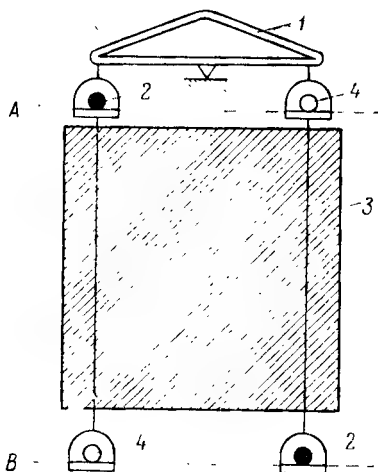


Рис. 15. Схема вертикальных весов Рихарца и Кригар-Менцеля.

1 — вертикальные весы с двумя парами чашек, подвешенных на двух различных уровнях A и B, 2 — притягиваемые массы на чашках весов, 3 — притягивающая масса из свинца, 4 — полые сосуды, равные по объему массам 2.

ловиям для эксперимента, чем это имело место у Йолли.

Вскоре Кёниг был назначен профессором Берлинского университета и отошел от этих работ, а вместо него помощником Рихарца стал О. Кригар-Менцель (1861—1929).

Все они вместе в 1898 г. опубликовали результаты законченных определений средней плотности Земли [68], [69].

Авторы располагали очень точными весами с коромыслом, изготовленным из позолоченной бронзы, имевшим длину 23,32 см. Полупериод колебаний весов составлял 45 сек. На этих весах однокилограммовая масса могла взвешиваться с точностью $\pm 0,01$ мг. В качестве притягиваемых масс на чашках весов устанавливались выкованные из меди, отшлифованные и позолоченные однокилограммовые шары. Точное их взвешивание было произведено в Бюро мер и весов в Париже. Для исключения влияния барометрических эффектов с противоположной стороны весов на чашку устанавливались полые шары такого же объема, что и основные.

Вся аппаратура была смонтирована в одном из казематов цитадели Шпандау, где находился немецкий военный арсенал. Для опыта были предоставлены слитки свинца, из которых была сложена притягивающая масса в виде параллелепипеда со стороной 210 см и высотой 200 см. Каждый слиток имел форму кирпича и весил около 34 кг. При общем числе слитков 2900 общая масса свинца составляла 100536,8 кг. Авторы сначала опасались, что свинцовая масса будет деформироваться действием собственного веса. Однако измерения показали, что в течение шести лет разность уровней верхней и нижней граней свинцового параллелепипеда изменилась менее, чем на 0,1 мм. В средней части параллелепипед имел два сквозных отверстия для подвеса нижних чашек весов к коромыслу. Вся аппаратура, а также притягивающая свинцовая масса для термоизоляции были заключены в большой цинковый ящик. Манипуляции с весами — перестановки обоих притягиваемых масс с различных чашек весов и взвешивание — производились дистанционным путем с площадки вне цинкового ящика. Были приняты другие предосторожности для исключения влияния температурных помех. Освещение узлов прибора внутри ящика производилось от отражающих зеркал, лампами, установленными за двойными стеклами вне рабочей комнаты и включаемыми только в моменты измерений. Несмотря на эти меры при проведении опытов внутри рабочего помещения часто возникал значительный градиент температуры по высоте.

Различие температуры на верхнем и нижнем уровнях чашек весов достигало 0,7 градуса. После перестановки притягиваемых масс возникали температурные потоки воздуха, что создавало ощутимые ошибки во взвешивании, даже при различии температуры на этих уровнях в сотые доли градуса.

Рассмотрим теорию метода определения постоянной тяготения в опытах Рихарца и Кригар-Менцеля. Для простоты рассуждения будем предполагать, что притягивающая масса M расположена симметрично относительно чашек весов (рис. 15). На массу m , помещенную на чашку весов, действует со стороны массы M вертикальная компонента ускорения притяжения, равная G , причем для массы m на нижней чашке весов она направлена вверх, а для массы на верхней чашке весов — вниз.

Пусть на левой верхней чашке весов установлена масса m , которая уравнивается массой m_1 , расположенной на правой нижней чашке весов. Уравнение равновесия весов для этого случая можно записать в виде

$$m(g_{\text{в}} + G) = m_1(g_{\text{н}} - G), \quad (42)$$

где $g_{\text{в}}$ и $g_{\text{н}}$ означают значения ускорения силы тяжести соответственно на верхней и нижней чашках весов. Если масса m опущена с левой верхней чашки на левую нижнюю чашку, то для ее уравнивания требуется положить на правую верхнюю чашку весов некоторую дополнительную массу m_2 . Уравнение равновесия примет вид

$$m(g_{\text{н}} - G) = m_2(g_{\text{в}} + G), \quad (43)$$

если учесть, что ускорение силы тяжести изменяется с высотой следующим образом:

$$g_{\text{н}} = g_{\text{в}} + \frac{\partial g}{\partial z} h, \quad (44)$$

где h — разность высоты верхнего и нижнего уровней чашек весов, на которых находятся массы m , m_1 и m_2 ; $\partial g / \partial z$ — вертикальный градиент ускорения силы тяжести в данном пункте.

Принимая во внимание малость величин G , $(\partial g / \partial z) \cdot h$, из уравнений (42) — (44) можно получить соотношение

для разности дополнительных уравнивающих масс m_1 и m_2

$$P = m_1 - m_2 = \frac{2m}{g_B} \left(2G - \frac{\partial g}{\partial z} h \right). \quad (45)$$

В случае отсутствия большой притягивающей массы M при перекладке той же массы m можно составить еще два уравнения:

$$m g_B = m'_1 g_H,$$

$$m g_H = m'_2 g_B,$$

где m'_1 , m'_2 — новые дополнительные уравнивающие массы. Из последних двух уравнений и уравнения (44) определяется изменение силы тяжести при переходе от верхнего уровня расположения масс m к нижнему:

$$\frac{\partial g}{\partial z} h = \frac{m'_2 - m'_1}{2m} g_B = \frac{P' g_B}{2m}. \quad (46)$$

Равенства (45) и (46) дают следующее окончательное выражение вертикальной компоненты ускорения притяжения

$$G = \frac{g_B}{4m} (P + P'),$$

если известна сила тяжести g_B на уровне верхней чашки весов, масса m , величины масс P и P' . Постоянную тяготения f можно определить, зная значение G и вычисляя коэффициент при f в следующем выражении:

$$G = f \left[\frac{\partial}{\partial z} \iiint_{\Omega} \frac{dM}{r} \right],$$

где Ω — объем притягивающей массы M , dM — элемент массы, r — расстояние от элемента dM до центра массы m .

Рихарц и Кригар-Менцель провели опыты с большой тщательностью. Подготовка и осуществление экспериментов заняли 6 лет. Они провели 45 взвешиваний масс m до установки свинцовой массы M и 28 взвешиваний после ее разборки. Кроме того, было проведено большое число взвешиваний в гравитационном поле установленной

массы M . В итоге обработки измерений авторы вывели значение постоянной тяготения

$$f = (6,685 \pm 0,011) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$$

и соответствующее ей значение средней плотности Земли

$$\sigma_{\oplus} = (5,505 \pm 0,009) \text{ г/см}^3.$$

Приведем также значение вертикального градиента силы тяжести, полученное в результате их опытов:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{g_{\text{п}} - g_{\text{в}}}{h} = 3227 \cdot 10^{-9} \text{ сек}^{-2}.$$

Среднее значение этого градиента для Земли равно $3086 \cdot 10^{-9} \text{ сек}^{-2}$. Обнаруженное различие авторы объясняют притяжением стен каземата и окружающего рельефа местности.

§ 20. Анализ результатов экспериментов с вертикальными весами

Йолли, Пойнтинг, Рихарц и Кригар-Менцель, принимая опыты по определению постоянной тяготения, основным аргументом в пользу вертикальных весов выдвигали большую стабильность их показаний за время эксперимента по сравнению с крутильными весами типа Мичела — Кавендиша. Нестабильность последних вызывалась обычно нестабильностью упругих свойств нити крутильной системы, что приводило к изменению упругой силы закрученной нити. Поскольку в опытах с крутильными весами измеряемая сила притяжения, по существу, сравнивается с упругой силой закрученной нити, то в конечном итоге от стабильности упругой силы полностью зависел успех эксперимента. Использование же для определения постоянной тяготения силы притяжения между известными взаимодействующими массами вертикальных весов означало, что в качестве силы сравнения используется сила тяжести, которая в течение времени измерения с точностью до 10^{-7} остается стабильной. Однако обращение к силе тяжести в качестве силы сравнения имеет тот существенный недостаток, что сила притяжения между взаимодействующими массами, крайне малая по своей величине, определяется как разность двух больших сил:

силы тяжести и силы тяжести плюс искомая сила притяжения между взаимно притягивающимися массами. Очевидно, что для определения разности двух сил притяжения с заданной относительной точностью необходимо с несравненно более высокой относительной точностью знать величину каждой из них.

Основные погрешности в опытах с вертикальными весами возникают в системе нож коромысла — опорная площадка. Известно, что поскольку профиль ножа имеет некоторый радиус кривизны, то ось качания весов находится выше лезвия ножа. Лезвие ножа, соприкасаясь с опорой очень небольшой площадью, создает громадное давление, вследствие чего в месте контакта ножа с опорой возникает действующий относительно оси качания момент силы трения, который очень нестабилен. Как бы тщательно ни были изготовлены лезвие ножа и опорная площадка весов, они далеко не идеальны. Поэтому при арретировании и каждой новой посадке ножа на опорную площадку изменяются форма и размеры контактной поверхности, а следовательно, и удельное давление ножа на опорную площадку, приводящее к изменению момента сил трения.

Промежуточное арретирование подвижной части весов требовалось при перестановке притягивающих масс в опытах Йолли. Важным улучшением методики в опытах Пойнтинга было то, что в ней не было необходимости арретировать весы так часто. Однако для исключения влияния притяжения коромысла весов, подвесных стержней и т. д. Пойнтинг, как уже говорилось, применял специальный прием, который все же требовал промежуточного арретирования. Уместно напомнить, что промежуточное арретирование крутильной системы в опытах Хейла и Хржановского приводило к изменению разности периодов собственных колебаний крутильной системы при разных положениях притягивающих масс на одну секунду при величине самой разности порядка 240° . Поскольку значение постоянной тяготения определяется по разности периодов, то становится очевидным, к каким погрешностям в определении постоянной тяготения это приводит.

В своих опытах Пойнтинг исходил из того, что все массы m_1 , m_2 , M_1 и M_2 однородны и имеют шаровую форму. Поворотная балка, несущая массы M_1 и M_2 , также предпо-

лагалась симметричной относительно вертикальных плоскостей, направленных вдоль и поперек балки. Но реально, по-видимому, возможны дефекты плотности в притягивающихся массах. Пойнтинг теоретически исследовал возможные ошибки от неоднородности плотности шаров.

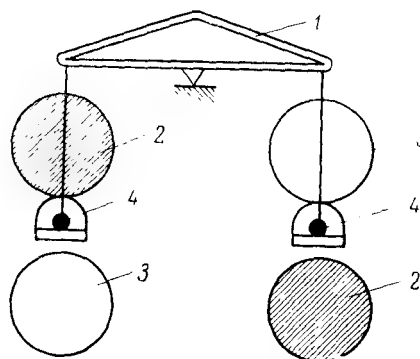


Рис. 16. Проект вертикальных весов Майера.

1 — коромысло весов, 2 — притягивающие массы (ртуть, заполняющая сосуд), 3 — полный сосуд, 4 — притягиваемые массы.

Исходя из теоретических выводов, он счел целесообразным организовать методику наблюдений так, чтобы по возможности исключить погрешности, обусловленные неоднородностями масс. Для этого, помимо одного ряда наблюдений, проводившихся обычным путем, он повторял наблюдения после поворота притягивающихся масс вокруг вертикальной оси на 180° . К сожалению, из результатов Пойн-

тинга нельзя усмотреть истинную причину различия результатов первого и второго рядов наблюдений; то ли оно произошло за счет неоднородной плотности шаров и неправильности их формы, то ли оно вызвано какими-нибудь другими причинами.

Вскоре после опубликования идеи эксперимента Кёнига и Рихарца А. Майер в небольшой заметке [75] предложил свой вариант расположения притягивающихся масс по схеме, изображенной на рис. 16, используя четыре больших сферических сосуда, заполненных ртутью. Ртуть должна перекачиваться из одного сосуда в другой в определенных комбинациях. Весы же имели две чашки, на которых должны были быть установлены притягиваемые массы m и дополнительные уравнивающие массы. Весы не нужно было арретировать, так как массы не переставлялись.

Кёниг и Рихарц в заметке [69] защищали свой вариант и в качестве одного из аргументов в свою пользу указали,

Т а б л и ц а 10

Автор и место проведения опытов	Йолли (Мюнхен, Германия)	Пойтинг (Бирмингем, Англия)	Рихард и Кригар-Менцель (цитадель Шпандау, Германия)
Год публикации	1878	1891	1898
Постоянная тяготения и средняя квадратическая ошибка, $10^{-10} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$	$6,46^{(*)} \pm 0,11$	$6,70 \pm 0,04$	$6,685 \pm 0,011$
Средняя плотность Земли и средняя квадратическая ошибка, $\text{г}/\text{см}^3$	$5,69 \pm 0,10$	$5,49 \pm 0,03$	$5,505 \pm 0,009$
Длина коромысла и разность высот притягиваемых масс, см	$L = 60,$ $h = 2100,5$	$L = 123,26$ $h = 48$	$L = 23,32$ $h = 226$
Материал притягиваемых масс, их форма и вес	Ртуть в стеклян- ной шаровой кол- бе, 5 кг	Сплав свинца с сурь- мой, шаровой формы, $21,6 \text{ кг}$	Свинец шаровой формы, $0,9467 \text{ кг}$
Материал притягиваемых масс, их форма и вес	Свинцовый шар, $5775,2 \text{ кг}$	Сплав свинца с сурь- мой, шаровой формы, $153,4$ и $76,5 \text{ кг}$	Свинец, параллелепипед размерами $211,1 \times 211,1 \times$ $\times 200,5 \text{ см}$, $100536,8 \text{ кг}$

^{*}) Значение γ вычислено нами с помощью формулы (16) по значению $\sigma_{\oplus}$ приведенному в оригинальной работе Йолли.

что метод Майера применим только к жидкой ртути и исключает возможность использования в качестве притягивающих масс других металлов. Однако следует обратить внимание на то, что с помощью ртути можно получить однородную по плотности массу. Именно это обстоятельство и заставило некоторых авторов в дальнейших опытах использовать ртуть, как материал для притягивающей массы.

Во всех опытах с вертикальными весами был неблагоприятным температурный режим. Изменения температуры достигали почти 0,1 градуса. Между тем в опытах с вертикальными весами плохой температурный режим при отсутствии вакуума особенно неприятен, потому что направление действия конвективных потоков воздуха совпадает с направлением измеряемой силы притяжения между массами. Можно указать и на ряд других второстепенных дефектов в опытах с вертикальными весами (неучет горизонтального градиента силы тяжести, неучет разности барометрических эффектов и разности температур для обоих плеч коромысла весов и т. д.).

Оценка результатов определений постоянной тяготения методом вертикальных весов показывает, что точность их несравненно ниже, чем в опытах с крутильными весами типа Мичела — Кавендиша. Вертикальные весы имеют более низкую чувствительность, чем крутильные весы при условии одинаковости величины используемых масс. Достигнутая точность в опытах с вертикальными весами получена лишь благодаря использованию больших притягивающих масс.

В табл. 10 приведены основные данные о вертикальных весах, взаимодействующих массах, а также дается сводка результатов определения постоянной тяготения и средней плотности Земли. Отметим, что мы перевычислили средние квадратические ошибки окончательных результатов. Для опытов Пойнтинга вычислена средняя квадратическая ошибка, соответствующая двум рядам значений f , полученным при двух различных положениях притягивающих масс.

Резюмируя, можно сказать, что прежде осуществленные опыты по определению постоянной тяготения с помощью вертикальных весов обладали по сравнению с методом крутильных весов более низкой точностью.

Другие опыты по измерению постоянной тяготения

§ 21. Опыты с вертикальным маятником, обладающим большим периодом колебаний

При высокой чувствительности крутильных весов в опытах по определению постоянной тяготения проявляется их существенный недостаток, который состоит в неустойчивости показаний из-за случайных толчков, температурных изменений и т. д. Более устойчивыми являются обычные весы с ножевыми опорами, но будучи менее чувствительными, они требуют больших притягивающих масс. Так, Йолли вынужден был применить в качестве притягивающей массы свинцовый шар весом в 5775,2 кг, а Рихарц и Кригар-Менцель — 100536,8 кг свинца.

Оригинально использовал для определения средней плотности Земли устойчивость весов Вильзинг из Потсдамской астрофизической обсерватории в примененной им аппаратуре с вертикальным маятником, обладавшим большим периодом колебаний. Первые опыты с макетом прибора дали обнадеживающие результаты. Позже был сконструирован и изготовлен Репсольдами в Гамбурге рабочий вариант прибора, с которым были проведены две серии измерений. Результаты этих определений подробно описаны Вильзингом в двух работах [103], [104] и кратко в раннем сообщении [102].

В отличие от метода Йолли — Пойнтинга, когда измерение величины притяжения между взаимодействующими массами сводится к определению изменения веса притягиваемых масс, в способе Вильзинга величина притяжения измерялась по изменению отклонения отвеса. Поскольку величина отклонения отвеса зависит от силы тяжести, то, по существу, измеряемая сила притяжения между массами в способе Вильзинга сравнивалась с силой тяжести.

Прибор Вильзинга (рис. 17) представлял собой одномоетровый вертикальный маятник, изготовленный в виде массивной трубы диаметром 4,15 см с шаровыми массами на обоих концах. Вес каждой шаровой массы был 540 г. Благодаря вертикальному положению маятника прогиб трубы маятника под действием собственного веса был незначителен. Труба, шаровые массы и другие металлические детали прибора изготавливались из меди, чтобы исключить влияние магнитных сил.

Посредине трубы маятника в специальную оправу вставлялся агатовый трехгранный нож, который одним своим ребром опирался на агатовую площадку, скрепленную с основанием прибора. Таким образом, маятник мог колебаться на ребре ножа. Поскольку центр тяжести всего маятника находился на несколько сотых долей миллиметра ниже оси качания, то маятник имел большой период собственных колебаний и прибор обладал большой чувствительностью. На трубе маятника укреплялось зеркало, с помощью которого наблюдались отклонения маятника. Весь прибор заключался в деревянный ящик, обитый жестью для уменьшения влияния изменений температуры и конвективных потоков воздуха. Опыты ставились в подвале Потсдамской астрофизической обсерватории при естественном температурном режиме.

Притягивающие массы были изготовлены в виде двух цилиндров из литой стали, весом по 325 кг. Вильзинг отказался использовать свинец, хотя и обладающий большей плотностью и немагнитными свойствами, ибо свинец не сохраняет неизменным свою форму. Цилиндры подвешивались на проволоке с помощью системы блоков так, что они могли подниматься и спускаться, а также передвигаться в горизонтальном направлении. Один цилиндр подносился с одной стороны нижней шаровой массы, а другой — с противоположной стороны второй шаровой массы.

Под действием притяжения, оказываемого цилиндрами на шары маятника, последний отклонялся от вертикали до тех пор, пока момент силы тяжести g не уравновешивал момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$. Момент сил выталкивания, возникающий вследствие того, что маятник находится в воздухе, Вильзинг также учитывал. Уравнение равновесия

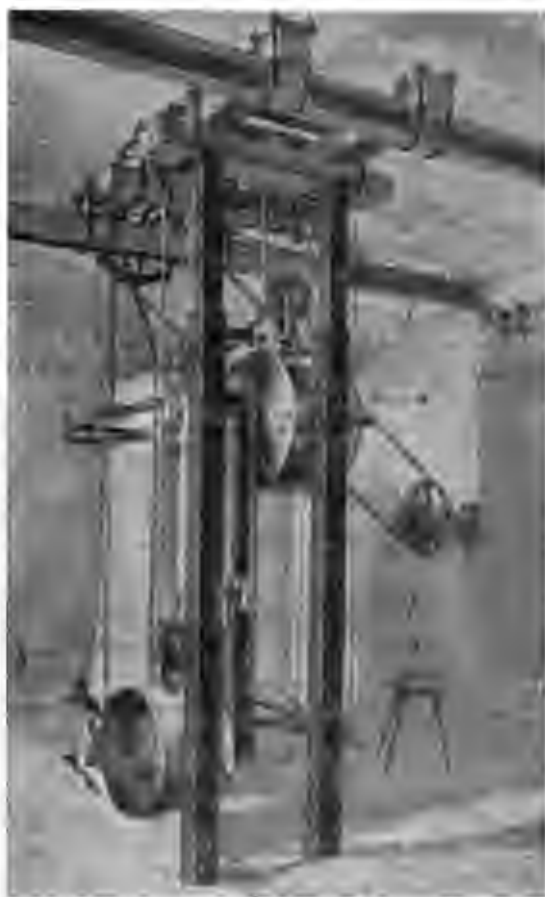


Рис. 17. Общий вид установки Вильзинга.

1 — стержень маятника, 2 — притягиваемые массы на его концах, 3 — агатовый нож маятника, 4 — притягивающие массы, 5 — система блоков для синхронного перемещения притягивающих масс.

маятника под действием всех этих моментов можно записать так:

$$g(Ml - M_1l_1) \sin \varphi_0 = \mathfrak{M}_{\text{пр}} \cos \varphi_0,$$

где M и M_1 — массы соответственно маятника и воздуха, вытесненного объемом маятника; l и l_1 — расстояния соответственно центра тяжести маятника и его геометрического центра от оси качания, φ_0 — угол отклонения от вертикали, а точнее, — угол между вертикалью и линией, проходящей через ось качания и центр тяжести маятника. При этом предполагается, что геометрический центр маятника лежит на этой же линии. Поскольку лезвие ножа имеет закругление, то ось качания маятника не совпадает с линией касания лезвия с опорной площадкой. Центр тяжести маятника отстоял всего на несколько сотых долей миллиметра от этой оси качания, поэтому плечо приложения силы тяжести было очень мало. Сила же притяжения стальных цилиндров действовала на массы маятника с плечом, достигающим 50 см. Это резкое различие величин плеч позволило сравнивать небольшую величину силы притяжения между взаимодействующими массами с величиной силы тяжести. Величина отклонения маятника от вертикали под действием притяжения цилиндров достигала нескольких минут дуги.

Целью опытов было определение величины момента сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$, который с точностью до множителя — постоянной тяготения f , — мог быть вычислен по известным взаимным положениям и размерам стальных цилиндров и маятника. Для определения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ из опыта находилась величина угла φ_0 , а также из дополнительных исследований — величина момента силы тяжести $g(Ml - M_1l_1)$.

Среднее положение маятника определялось четырежды при одном и том же положении цилиндров. Затем стальные цилиндры переставлялись и опять производилось четыре измерения. Поскольку оба ряда наблюдений повторялись, получалась серия из 16 значений среднего положения маятника. В течение серии маятник не арретировался. Этим исключалась трудно учитываемая ошибка в измерениях среднего положения маятника, возникающая

при каждой новой посадке ножа маятника на площадку качания.

Для получения величины $g(Ml - M_1 l_1)$ Вильзинг измерял период колебаний маятника. Дифференциальное уравнение колебаний маятника он представлял в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g(Ml - M_1 l_1)}{J} \sin \varphi + \frac{\mathfrak{M}_{\text{пр}}}{J} \cos \varphi = 0. \quad (47)$$

Здесь J — момент инерции маятника относительно оси качания. Он равен $J = J_0 + Ms^2$, где J_0 — момент инерции относительно центра тяжести, s — расстояние от центра тяжести до мгновенной оси качания. Момент инерции J оказывается переменным вследствие закругления ребра призмы. В уравнении (47) β — коэффициент пропорциональности в члене, представляющем момент сил сопротивления воздуха движению маятника. В теории Вильзинга этот момент предполагался пропорциональным первой степени скорости движения маятника. Введем обозначения:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{J} \sqrt{g^2 (Ml - M_1 l_1)^2 + \mathfrak{M}_{\text{пр}}^2},$$

$$\psi = \arctg \frac{\mathfrak{M}_{\text{пр}}}{g(Ml - M_1 l_1)}.$$

Уравнение (47) можно переписать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \sin(\psi + \varphi) = 0.$$

Обозначив $\psi + \varphi = \theta$, имеем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \varepsilon^2 \sin \theta = 0. \quad (48)$$

Вследствие малости угла θ в уравнении (48) выражение $\sin \theta$ можно заменить через θ . Решение линеаризованного уравнения Вильзинг получает в виде

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \left(\cos \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2} t + \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2}} \sin \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2} t \right), \quad (49)$$

а период колебаний, соответствующий (49), записывается так:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{g(Ml - M_1 l_1)}} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\mathfrak{M}_{\text{пр}}}{g(Ml - M_1 l_1)} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{\beta^2 J}{g(Ml - M_1 l_1)} \right]. \quad (50)$$

Период колебаний T Вильзину нужен был только для определения величины $g(Ml - M_1 l_1)$. Чтобы исключить из соотношения (50) величину момента инерции J , Вильзинг находил еще один период колебаний этого маятника с укрепленной на верхнем его конце дополнительной шайбой. Период колебания маятника с укрепленной шайбой может быть записан в следующем виде:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J - m_1 d_1^2}{g(Ml - M_1 l_1) + g(m_1 d_1 - m'_1 d'_1)}} \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{\mathfrak{M}_{\text{пр}}}{g(Ml - M_1 l_1)} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{\beta^2 J}{g(Ml - M_1 l_1)} \right], \quad (51)$$

где m_1 и d_1 — масса шайбы и расстояние ее центра тяжести от оси качания, m'_1 и d'_1 — масса вытесненного воздуха и расстояние геометрического центра шайбы от оси качания.

Из равенств (50) и (51), пренебрегая членами высшего порядка малости, Вильзинг получил формулу момента силы тяжести:

$$g(Ml - M_1 l) = T_1^2 \frac{g(m_1 - m'_1) d_1}{T^2 - T_1^2} \left(1 + \pi^2 \frac{m_1 d_1^2}{g(m_1 - m_1^2) d_1 T_1^2} \right).$$

Для определения периода колебаний моменты прохождения бликов от зеркала, укрепленного на трубе маятника, отмечались через визирную нить отсчетного телескопа с точностью до $0^s, 1$.

При обработке вводился ряд поправок за приведение периода к бесконечно малым колебаниям, за притяжение цилиндрами трубы маятника и других его деталей, за температуру, за выталкивающее действие воздуха и т. д. Поскольку период колебаний маятника в приборе Вильзинга очень сильно зависел от амплитуды колебаний из-за

непостоянства радиуса кривизны ножа маятника и деформации системы нож — опорная площадка, то было проведено тщательное исследование этой зависимости. Как показал опыт, затухание происходит по закону, заметно отличающемуся от получаемого в предположении, что сила сопротивления прямо пропорциональна первой степени скорости движения маятника. Период колебаний маятника хорошо представлялся формулой вида

$$T = T_0 [1 + T_0^2 (a\varphi_0 - b\varphi_0^2)],$$

где a , b — некоторые постоянные, а φ_0 — амплитуда колебаний. Вильзинг обнаружил также зависимость поправки за амплитуду от материала ножа и опорной площадки. Поправка за амплитуду для твердых стальных подушек по величине близка к поправке, соответствующей агатовым подушкам. При подушках из мягкой стали она в три раза больше. Обрабатывая наблюдения, Вильзинг учел также и то обстоятельство, что при большом затухании колебаний среднее положение маятника не может быть получено простым осреднением четного числа последовательных экстремальных отклонений маятника.

Входящий в равенства (50), (51) момент силы притяжения $\mathcal{M}_{\text{пр}}$ складывается из момента притяжения каждым стальным цилиндром верхней и нижней шаровых масс маятника, коромысла и ряда других деталей маятника. Кроме этого притяжения, необходимо учитывать притяжение маятника направляющими цилиндрами, которые в процессе опыта также изменяют свое положение. Поскольку часть момента сил притяжения, обусловленная притяжением трубы, ножа, зеркала и других деталей маятника стальными цилиндрами не могла быть вычислена с достаточной точностью, Вильзинг стремился ее исключить. Поэтому он дополнительно определял период колебаний маятника со снятыми шаровыми массами для нахождения указанной части момента сил притяжения. Момент сил притяжения выводился Вильзингом для некоторого зафиксированного среднего положения маятника, а затем уже учитывалось его изменение при отклонении маятника от этого положения.

Поскольку потенциал притяжения цилиндра конечной длины для точек его оси описывается конечным аналити-

ческим выражением, Вильзинг представил потенциал притяжения в виде ряда по степеням обратных расстояний и полиномов Лежандра. В предыдущей главе мы уже приводили аналогичные выражения, выделенные Хейлом, который, по-видимому, не был знаком с работой Вильзинга, сделанной за три десятилетия до его исследований. Хейл считал, что представление потенциала притяжения кругового цилиндра конечной длины в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра получено им впервые. Следует отметить, что Вильзинг эту задачу решил несколько не в меньшей мере. Коэффициенты упомянутого ряда Вильзинг определял из условия, что они тождественны коэффициентам разложения потенциала притяжения цилиндра для точки, расположенной на его оси.

Во второй работе [104] Вильзинг опубликовал новые результаты определения средней плотности Земли со своим прибором. Он несколько изменил расположение притягивающих стальных цилиндров, поместив их оси в плоскости качания маятника, что не удавалось осуществить по техническим причинам в первых опытах. Это несколько упростило методику вычисления момента сил притяжения между шарами и цилиндрами. Были приняты меры к улучшению температурного режима прибора. Наблюдатель был отгорожен от прибора стеной, обитой жестью. Перемещение притягивающих стальных пробных цилиндров стало осуществляться дистанционно. Несмотря на эти меры предосторожности, Вильзинг все же обнаружил в приборе некоторую слоистость температуры. Поэтому он принял меры для уменьшения асимметричных потоков воздуха при перестановке притягивающих цилиндров. Помимо медных шаровых масс, Вильзинг использовал во втором опыте шары из сплава свинца с сурьмой, что позволило ему получить дополнительно два ряда независимых определений средней плотности Земли. Всего было проведено 26 наблюдений с медными шаровыми массами, 39 наблюдений с шарами из сплава свинца с сурьмой и 42 наблюдений без шаров. Средняя квадратическая ошибка второго ряда опытов при незначительном увеличении числа наблюдений стала в три раза меньше, чем ошибка первого ряда. Это говорит о совершенстве последних опытов Вильзинга. Рассматривая результат первого опыта как независимый, из

сочетания с последующими определениями он выводит среднюю плотность Земли: $\sigma_{(1)} = (5,579 \pm 0,012) \text{ г/см}^3$.

В 1889 г. В. Ласка из Праги предложил конструкцию нового прибора для определения постоянной тяготения [70], использовав идею Вильзинга. Его прибор (рис. 18) имел вертикально расположенный стержень. В середине стержня устанавливался трехгранный нож, одно ребро которого опиралось на полированную площадку штатива. Центр тяжести стержня находился чуть ниже оси качания. На нижнем конце коромысла укреплялась шаровая масса m , а на верхнем — плоско-выпуклая стеклянная линза. Оптическая ось линзы находилась в плоскости качания стержня. К линзе подводилась плоскопараллельная стеклянная площадка, и пучок монохроматического света, направляемый призмой на плоскопараллельную пластинку, создавал интерференционную картину в виде колец Ньютона. Эти кольца мог наблюдать в телескоп наблюдатель, находящийся в соседней комнате. По интерференционной картине с большой точностью определяется изменение положения стержня, возникающее под действием притяжения массы m некоторой большой притягивающей массой M . Такой массой должен был служить стеклянный сферический сосуд, заполняемый ртутью. В результате притяжения массой M массы m стержень прибора отклонится от вертикали так, что момент сил притяжения станет равным моменту силы тяжести. Результирующая момента силы тяжести будет приложена к

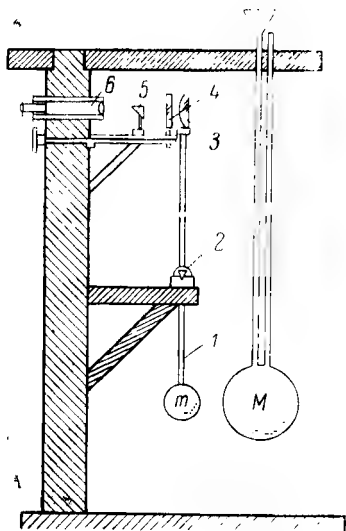


Рис. 18. Схема прибора Ласки.

1 — маятник с шаровой притягиваемой массой m , 2 — нож маятника, 3 — плоско-выпуклая линза, 4 — плоскопараллельная пластинка, 5 — призма, 6 — телескоп для наблюдения интерференционных колец Ньютона, 7 — сосуд со ртутью, представляющий притягивающую массу M .

центру тяжести стержня. В очень краткой (1 стр.) заметке Ласка не дает никакой теории прибора, а описывает только идею и принцип его устройства. Теория прибора аналогична разработанной Вильзингом. Никаких экспериментальных результатов не опубликовано.

§ 22. Метод Зарадничека для определения малых эффектов притяжения

Чешский физик И. Зарадничек из Физического института университета в Брно в работе 1933 г. [106] предлагал использовать для измерения притяжения между массами резонансный метод. В такт собственным колебаниям крутильной системы одних крутильных весов колеблется крутильная система других весов так, что притягивающая сила между массами постоянно раскачивает первую крутильную систему. Этот способ позволяет как бы накапливать эффект притяжения и увеличивать угол отклонения крутильной системы от равновесного положения. В идеальном случае таким способом можно получить бесконечно большие амплитуды колебаний, однако наличие сил сопротивления воздуха и сил внутреннего трения в нити ограничивает резонансные амплитуды колебаний.

Прежде чем приступить к изложению теории резонансного метода определения постоянной тяготения, разработанной Зарадничеком, напомним, что эта идея уже использовалась ранее Этвешем. Однако Этвеш применял этот метод только для задания крутильной системе первоначальной амплитуды колебаний. В работе [50] он описывает устройство, названное мультипликатором тяготения, которое позволяет, поднося и удаляя большие притягивающие массы, раскачивать крутильную систему. Такой же способ для задания начальной амплитуды использовал в своих опытах 1930 г. и Хейл. В его приборе два сосуда то заполнялись ртутью, то освобождались от нее в такт собственным колебаниям крутильной системы. До Зарадничека резонансный метод двух крутильных весов рассматривал И. Кунц [71]. Заслуга Зарадничека состоит в том, что идею резонансных колебаний он использовал для определения величины притяжения между массами, создав конкретную конструкцию двойных крутильных весов.

Прибор Зарадничека, как уже упоминалось, состоял из двух крутильных весов. Одни из них — внутренние — имели легкое алюминиевое коромысло длиной 40,6 см и диаметром 3 мм, на концах которого укреплялось по свинцовому шару весом 94 г каждый. Коромысло подвешивалось за середину на тонкой нити, изготовленной из платино-иридиевого сплава. Длина этой нити была 30 см, а диаметр ее 20 мк. Период собственных упругих колебаний этих малых крутильных весов был порядка 500 сек. Другие весы, внешние, выполнены в виде П-образной латунной трубки, горизонтальная часть которой имеет длину 60 см, а вертикальное плечо 55 см. На нижних концах вертикальной части П-образного коромысла крепятся свинцовые шаровые массы по 11,3 кг в каждой. Это второе коромысло подвешивалось за середину на нити из стальной проволоки длиной 0,5 и 2,0 м. Весы располагались так, чтобы оси нитей обеих крутильных систем совпадали. Выведенные из положения равновесия весы совершали упругие колебания вокруг вертикальной оси. Помимо упругих сил закрученной нити, на колебания влияла сила притяжения между массами, укрепленными на концах коромысел. Влияние масс больших весов на колебание малых было существенным, обратное же — весьма незначительным. В этом смысле рассматривалась ограниченная задача.

Приведем здесь теорию прибора для определения постоянной тяготения резонансным методом в соответствии с работой Зарадничека [106]. Выберем прямоугольную систему координат $x y z$ (рис. 19) с началом в центре тяжести O коромысла внешних крутильных весов. Ось z направим вдоль оси нити, плоскость $x O y$ пусть совпадает с плоскостью колебаний этих весов. Координаты центра шаровых масс M , укрепленных на конце коромысла, равны $(\pm R_1 \cos \varphi, \pm R_1 \sin \varphi, 0)$, где обозначения R_1 и φ ясны из рис. 19. Вторая крутильная система расположена так, что центр тяжести ее коромысла с массами m находится также на оси z на расстоянии h от начала координат. Координаты центра масс m равны $(\pm R_2 \cos \psi, \pm R_2 \sin \psi, h)$. Обозначения R_2, ψ и h также приведены на рис. 19.

Момент сил притяжения между шаровыми массами m и M на концах коромысел малых и больших крутильных

весов выразится так:

$$\mathfrak{M}_{\text{уп}} = 2R_1R_2mMf \sin(\psi - \varphi) \left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right],$$

где f — постоянная тяготения, r_1 и r_2 — расстояния между притягивающимися массами, соответственно от M до

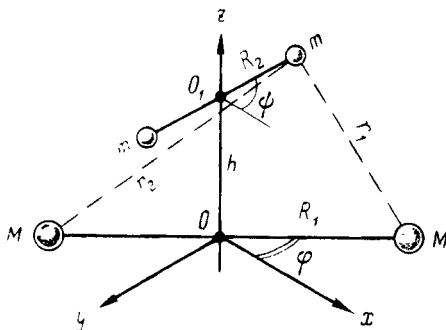


Рис. 19. Схема больших и малых крутильных весов для определения постоянной тяготения методом Зарадничка.

ближайшей массы m и от M до отдаленной массы m :

$$r_1^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos(\psi - \varphi) + h^2,$$

$$r_2^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos(\psi - \varphi) + h^2.$$

Если предположить предварительно, что колебания обоих крутильных весов малы, то

$$\sin(\psi - \varphi) \cong \psi - \varphi,$$

$$\cos(\psi - \varphi) \cong 1,$$

а дифференциальное уравнение вынужденных колебаний коромысла малых весов с массами m можно записать в следующем виде:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \tau\varphi = 2mMR_1R_2f\Delta(\psi - \varphi), \quad (52)$$

где J — момент инерции коромысла с массами m относи-

тельно оси нити, $2\beta \frac{d\varphi}{dt}$ — момент сил сопротивления воздуха, $\tau\varphi$ — момент упругих сил закрученной нити,

$$\Delta = [(R_1 - R_2)^2 + h^2]^{-3/2} - [(R_1 + R_2)^2 + h^2]^{-3/2}.$$

Уравнение (52) перепишем в виде

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = E\psi_0 \cos \Omega t, \quad (53)$$

где для краткости введены следующие обозначения:

$$D = \tau + 2mMR_1R_2f \cdot \Delta, \quad (54)$$

$$E = 2mMR_1R_2f\Delta, \quad (55)$$

$$\psi = \psi_0 \cos \Omega t,$$

ψ_0 — амплитуда колебаний больших крутильных весов, Ω — их частота.

Решение уравнения (53) складывается из двух частей. Одно соответствует вынужденным, а другое — собственным колебаниям. Последние в силу наличия демпфирования скоро исчезают и остаются только вынужденные, определяющиеся следующим равенством:

$$\varphi = \varphi_0 \cos (\Omega t + \varepsilon).$$

Амплитуда вынужденных колебаний φ_0 определяется соотношением

$$\varphi_0 = \frac{E\psi_0}{J \sqrt{[2\alpha\Omega]^2 + [\omega_c^2 - \Omega^2]^2}},$$

где $\alpha = \beta/J$, $\omega_c = D/J$ — частота собственных колебаний малых крутильных весов, а фаза ε определяется следующим соотношением:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\alpha\Omega}{\omega_c^2 - \Omega^2}.$$

Резонанс наступает при соотношении частот

$$\Omega^2 = \omega_c^2 - \alpha^2,$$

откуда амплитуда вынужденных колебаний φ_0 при

резонансе равна

$$\varphi_{0 \text{ рез}} = \frac{E\psi_0}{J\alpha \sqrt{4\Omega^2 + \alpha^2}}.$$

Напомним, что интересующая нас постоянная тяготения содержится, как показывают равенства (54) и (55), в величинах E и D . Они-то и должны быть определены из опыта, а уже затем по ним, зная массы m и M и расстояния R_1 и R_2 , можно вычислить постоянную тяготения f .

Помимо определения постоянной тяготения с помощью резонансного метода, Зарадничек провел измерения этой постоянной обычным динамическим способом. Периоды колебаний крутильной системы малых весов в ближнем и дальнем положениях притягивающих масс были соответственно равны 480^s и 506^s . В работе [106] приводятся три значения постоянной тяготения, определенные динамическим способом: $6,53 \cdot 10^{-11}$; $6,71 \cdot 10^{-11}$; $6,55 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$.

В результате измерений постоянной тяготения резонансным методом Зарадничек получил значение постоянной тяготения, которое по точности было не лучше того, что было им получено динамическим методом. Вот данные, соответствующие резонансному методу:

$6,71 \cdot 10^{-11}$; $6,69 \cdot 10^{-11}$; $6,86 \cdot 10^{-11}$; $6,58 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$.

Эксперимент Зарадничека проведен не на высоком уровне, принципиальные возможности способа полностью не использованы. К сожалению, в работе мало внимания уделено описанию эксперимента, поэтому его анализ затруднен. Основной порок в опытах Зарадничека лежит не в методе, а в неудовлетворительном учете влияний внешних условий — температуры, давления, а также в неточности линейных измерений.

§ 23. Повышение чувствительности крутильных весов, осуществленное Бюргессом и Танглем

Поскольку в крутильных весах типа Мичела — Кавендиша момент упругих сил нити обратно пропорционален четвертой степени ее диаметра, то для увеличения чувствительности крутильных весов желательно использовать более тонкие нити. Однако уменьшение диаметра

нити ограничено нагрузкой подвешиваемых масс. Следовательно, для увеличения чувствительности крутильных

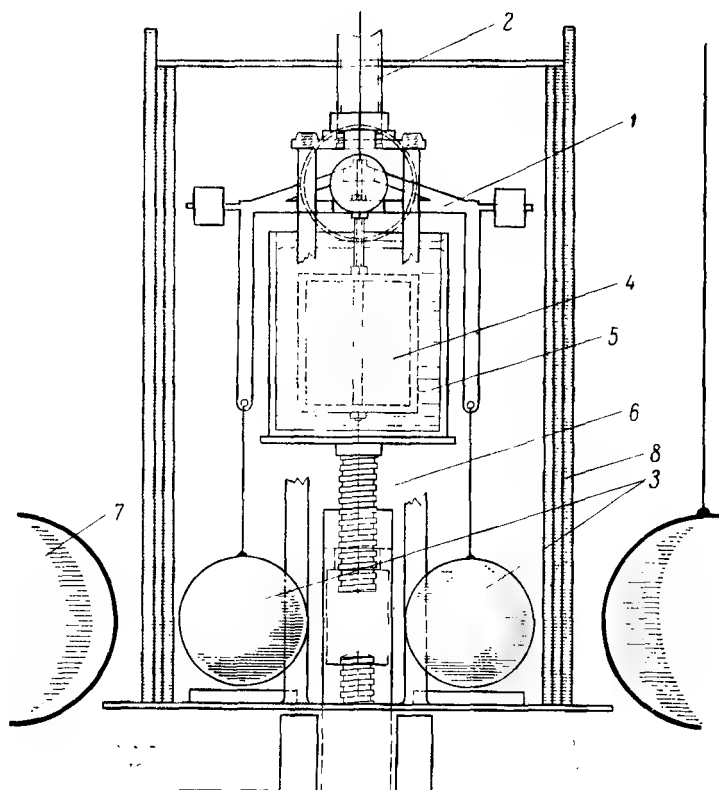


Рис. 20. Поперечный разрез прибора Бюресса.

1 — коромысло, 2 — нить крутильной системы, 3 — притягиваемые массы, 4 — полый сосуд, жестко связанный с коромыслом, 5 — ртуть, 6 — винт для регулировки уровня сосуда со ртутью, 7 — притягивающие массы, 8 — кожух прибора.

весов путем уменьшения диаметра нити необходимо компенсировать действие веса крутильной системы на нить.

Бюресс в физической лаборатории в Сорбонне предложил [37], [38] помещать крутильную систему в ртуть так, чтобы выталкивающая сила снимала нагрузку с крутильной нити. Он изготовил крутильные весы (рис. 20),

которые имели коромысло П-образной формы с горизонтальным плечом длиной 12 см. На концах вертикальных плеч длиной в 9 см были укреплены свинцовые шаровые массы по 2 кг каждая. К нижней части коромысла прикреплялся полый цилиндр, который погружался в ртуть, налитую в цилиндрический сосуд. Выталкивающая сила, действующая со стороны ртути на полый цилиндр, почти полностью компенсировала вес коромысла, шаровых масс и самого полого цилиндра. Крутильная система была подвешена на нити длиной 35 см и диаметром около 30 мк, изготовленной из плавленого кварца. Нить испытывала нагрузку всего в 5—10 г вместо 5,5 кг (вес всей крутильной системы).

В качестве притягивающих масс использовались два свинцовых шара по 10 кг каждый. Шары укреплялись на независимой от крутильной системы подставке так, что они могли поворачиваться вокруг оси нити для установки в требуемом положении. Постоянная тяготения определялась с помощью описанной аппаратуры так же, как это делалось с крутильными весами Мичела — Кавендиша, использовался метод статического отклонения коромысла под действием притяжения больших притягивающих масс. При этом необходимая для решения задачи упругая постоянная нити определялась по измеренному периоду крутильных колебаний специального алюминиевого кругового цилиндра весом 30,060 г, подвешиваемого на нити вместо коромысла. Насколько чувствительными оказались крутильные весы Бюресса, можно судить по тому, что они под действием притяжения упомянутых небольших притягивающих масс отклонялись на 12°.

Регистрация отклонений крутильной системы производилась визуально с помощью телескопа, имевшего фокусное расстояние около 3 м. Вертикальные размеры измерялись катетометром с точностью $\pm 0,02$ мм. Вся аппаратура для опытов была установлена в подвале, где температура за день изменялась не более чем на 0,1 градуса; различие между летним и зимним периодами составляло менее 2°.

В результате опытов Бюресс получил значение средней плотности Земли $\sigma_{\oplus} = 5,55 \text{ г/см}^3$ и значение постоянной тяготения $f = 6,64 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$.

До Бюргесса аналогичный опыт проделал Пойнтинг в 1894 г. Однако нестабильность прибора заставила его отказаться от такого пути увеличения чувствительности крутильных весов. В 1926 г. к этой идее вновь вернулся ученик Р. Этвеша — К. Тангль [98] в Будапеште. Он изготовил металлический короб длиной 12 см и высотой 6 см, который служил коромыслом крутильной системы (рис. 21). Внутри короба в его дальних концах помещались

две свинцовые массы по 250 г каждая. Короб подвешивался за середину на короткой нити диаметром 200 мк, которая выполняла роль подвеса коробки. Нить крутильной системы имела в диаметре всего 25 мк. Короб вместе со свинцовыми массами по-

гружался в воду. Вес вытесненной коробом воды был таков, что нить оказывалась под нагрузкой всего 15 г. Опыты Тангля оказа-

лись удачными; их недостатком было большое смещение нуля-пункта отсчетов прибора. В своей работе Тангль не преследовал цели определения постоянной тяготения и средней плотности Земли, а использовал прибор для гравиметрических измерений.

Эксперименты Бюргесса и Тангля свидетельствуют, что увеличение чувствительности крутильных весов описанным путем заслуживает внимания. Такие весы могут быть использованы для статического метода определения постоянной тяготения. Так как колебания крутильной системы оказываются демпфированными, то некоторые затруднения должны возникнуть при определении постоянной крутильной нити. Более перспективно использование таких весов для некоторых дифференциальных опытов по гравитации.

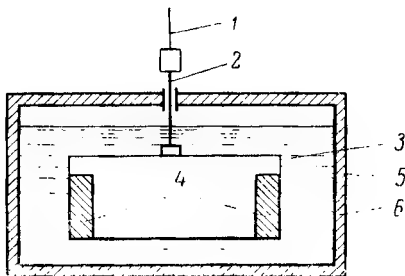


Рис. 21. Схема устройства Тангля для повышения чувствительности крутильных весов.

1 — нить крутильной системы, толщиной 25 мк, 2 — нить подвеса, 3 — полая коробка-коромысло, 4 — притягиваемые массы по 250 г, 5 — ртуть, 6 — корпус прибора.

§ 24. Определение постоянной тяготения и массы Земли по изменению формы уровенной поверхности

Русский ученый А. Гершун [7], [53] предложил идею и теорию способа определения постоянной тяготения и массы Земли по изменению формы уровенной поверхности под действием притяжения некоторой известной массы.

Пусть имеется ртуть, разлитая по некоторой поверхности таких размеров, что в средней ее части на форме поверхности не сказываются менисковые искажения. В гравитационном поле Земли свободная поверхность ртути примет форму уровенной поверхности. Если для простоты считать Землю сферой и пренебречь ее аномальным строением, то уровенная поверхность ртути будет иметь такой же радиус кривизны R , что и Земля. Обозначим массу Земли M . Теперь, если сверху, на расстоянии h от поверхности ртути поместить некоторую хорошо известную шаровую массу m (рис. 22), то уровенная поверхность изменит

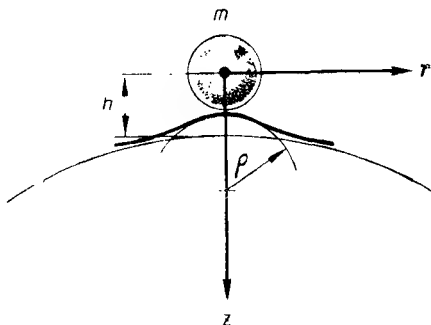


Рис. 22. Схема опыта Гершуна.

m — притягивающая масса над поверхностью жидкости, ρ — радиус кривизны уровенной поверхности после поднесения массы m .

свою форму, а следовательно, изменится и радиус кривизны свободной поверхности ртути. Выбрав начало прямоугольных координат в центре массы m и направив ось z к центру Земли, можно написать в этой системе координат уравнение уровенной поверхности гравитационного потенциала Земли и возмущающей массы. Если V_1 и V_2 — соответственно потенциалы Земли и массы m , то уравнение уровенной поверхности суммарного потенциала будет иметь вид

$$V_1(r, z) + V_2(r, z) = \text{const},$$

где

$$V_1(r, z) = \frac{jm}{(r^2 + z^2)^{1/2}}, \quad V_2(r, z) = \frac{jM}{[r^2 + (R + h - z)^2]^{1/2}}.$$

Радиус кривизны уровенной поверхности в точке O равен

$$\rho = \frac{Mh^2 - mR^2}{mR^3 + Mh^3} hR.$$

Измерив радиус кривизны ρ и зная величины m , h , R , можно определить массу Земли M

$$M = \frac{mR^3(\rho + h)}{h^3(R - \rho)}.$$

Расчеты показывают, что даже небольшая масса m способна сильно изменить радиус кривизны уровенной поверхности. Так, если принять радиус платинового шара равным h , плотность его равной 21 г/см^3 , среднюю плотность Земли $\sigma_{\oplus} = 5,5 \text{ г/см}^3$, то $\rho = 0,21 R$, т. е. радиус кривизны под действием возмущения платинового шара уменьшается в пять раз при отсутствии возмущений.

Гершун предлагал оптический способ измерения радиуса кривизны уровенной поверхности ртути. Его метод, по существу, уже применялся ранее в оптике для определения больших радиусов кривизны. Сам Гершун не проводил опытов по измерению постоянной тяготения: его работа носит методический характер.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что способ Гершуна основывается не на силе притяжения или даже не на градиентах силы, как это имело место в методах, описанных ранее, а на потенциале силы притяжения. Поскольку потенциал силы притяжения изменяется обратно пропорционально расстоянию, то отношение потенциала всей Земли к потенциалу притягивающей массы является величиной большей, нежели отношение сил притяжения для тех же масс. Это выгодно для измерения гравитационного действия притягивающей массы. Следует видеть, однако, и трудности в постановке опыта. Прежде всего приходится измерять кривизну в точке, в то время как пучок света позволяет получить среднюю кривизну, соответствующую некоторой небольшой площади. Кроме

того, необходимо иметь в виду, что уровенная поверхность потенциала силы тяжести Земли отлична от сферы. Ее радиус кривизны сильно зависит от аномального распределения масс в Земле, следовательно, необходимо измерять первоначальный радиус кривизны поверхности ртути до внесения возмущающих масс.

К описанному способу определения постоянной тяготения и массы Земли в определенном смысле примыкает

и следующий. Для простоты изложения идеи этого способа предположим, что гравитационное поле Земли изменяется только с высотой

$$g(z) = g_0 - z \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_0 + \dots,$$

и в дальнейшем ограничимся первыми двумя членами разложения.

Пусть имеются два сообщающихся сосуда, заполненных ртутью. Верхний уровень жидкости в обоих сосудах одинаков. Если теперь под один из сосудов, обозначенный на рис. 23 буквой *A*, поднести некоторую массу *M*, то под действием ее притя-

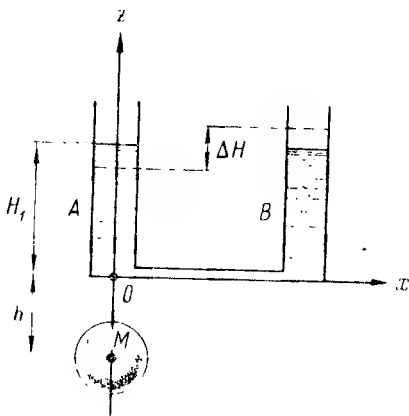


Рис. 23. Схема опыта определения постоянной тяготения по измерению уровня жидкости в сообщающихся сосудах.

M — притягивающая масса, ΔH — изменение высоты уровня жидкости после поднесения массы *M*, H_1 — первоначальная высота уровня жидкости в сосудах, *h* — расстояние до центра массы *M*.

жения в сосудах изменится уровень жидкости. Опять для простоты положим, что сосуд *B* отстоит достаточно далеко от *A*, и поднесенная масса не оказывает никакого влияния на жидкость в этом сосуде. Ускорение силы притяжения массы *M* изменяется с высотой по закону

$$G(z) = G_0 - z \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)_0 + \dots$$

Таким образом, в равновесном состоянии уровни ртути

в обоих сосудах будут разные. Они будут отличаться друг от друга на величину ΔH , которую можно определить из условия

$$\begin{aligned} H_1 - \frac{\Delta H}{2} \int_0^{\frac{\Delta H}{2}} \sigma \left\{ g_0 + G_0 - z \left[\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)_0 \right] \right\} dz = \\ = \int_0^{H_1 + \frac{\Delta H}{2}} \sigma \left[g_0 - z \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_0 \right] dz, \quad (56) \end{aligned}$$

где σ — плотность жидкости.

Левая часть этого равенства соответствует левому сосуду A , жидкость в котором находится под действием ускорения силы тяжести $g(z)$ и ускорения силы притяжения $G(z)$. Правая же часть представляет давление жидкости под действием одного лишь ускорения силы тяжести. Из равенства (56) следует

$$\Delta H = \frac{H_1 \left[G_0 - \frac{H_1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)_0 \right]}{g_0 + G_0 - H_1 \left[2 \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)_0 \right]}.$$

Полагая, что G_0 создается возмущающей массой $M = 100$ кг, расположенной на расстоянии $h = 25$ см при $H_1 = 10$ см, получим, что изменение ΔH имеет порядок 10^{-8} см. Такую малую величину с необходимой относительной ошибкой (10^{-5} — 10^{-6}) практически зарегистрировать трудно из-за температурных помех, влияния поверхностного натяжения в жидкости и пр. Большие изменения ΔH получаются в условиях малой величины g_0 , в частности, в условиях невесомости, о чем см. § 25.

§ 25. Сводка результатов опытов, описанных в настоящей главе

В настоящей главе было описано несколько идей опытов по определению постоянной тяготения и массы Земли. Одни из них стоят ближе к идее метода крутильных весов Мичела — Кавендиша, другие — к методике вертикальных

Т а б л и ц а 11

Автор	Год опубликования	Значение постоянной тяготения и ее средняя квадратическая ошибка, 10^{-11} м ³ /кг·сек ²	Значение средней плотности Земли и ее средняя квадратическая ошибка, г/см ³
Виль- зиг	1889	6,587 *) $\pm 0,015$	5,579 $\pm 0,012$
Бюргесс	1902	6,64	5,55
Зарад- ничек	1933	6,66 $\pm 0,04$	5,52 *) $\pm 0,04$

*) Значения $\sigma_{\oplus}$ и f вычислены нами с помощью формулы (16) по соответствующим значениям f и $\sigma_{\oplus}$, приведенным в оригинальных работах указанных авторов.

весов Йолли. Несколько особняком стоит способ Гершуна. Поэтому провести единый анализ всех этих разнообразных идей опытов, подобно тому как это делалось в предыдущих двух главах, затруднительно. Конкретные же замечания, связанные с идеями опытов, приводились в соответствующих параграфах. Здесь же мы приведем сводку результатов опытов (табл. 11) и некоторых параметров аппаратуры (табл. 12).

Значение постоянной тяготения, приписанное Зарадничку, выведено нами как среднее из двух средних значений, соответствующих динамическому и резонансному методам. При этом следует указать, что числовое значение результатов опыта Зарадничка носит приближенный характер, так как основной задачей своего исследования сам автор считал лишь разработку теории предложенного им нового метода определения постоянной тяготения. Эксперимент же имел для Зарадничка второстепенное значение. То же можно сказать и о результатах Бюргесса, который рассматривал их как иллюстрацию возможностей своего метода. Он указал на ряд необходимых усовершенствований в аппаратуре и методике. В частности, необходимо помещать крутильную систему в вакуум, увеличить горизонтальное плечо коромысла, уменьшить температур-

Таблица 12

Автор и место опытов	Метод	Материал притягиваемых масс и их вес:	Материал притягивающих масс, их форма и вес:
Вильзипг (Потсдам, Германия)	вертикальных маятников с большим периодом колебаний	медные и из сплава свинца с сурьмой шары по 540 г	свинцовые цилиндры по 325 кг
Ласка (Чехословакия) (только идея опыта)	вертикальных маятников с большим периодом колебаний	не уточнены	ртуть, заключенная в сферический стеклянный сосуд
Бюргесс (Париж, Франция)	крутильных весов с разгруженной крутильной нитью	свинцовые шары, по 2 кг	свинцовые шары, по 10 кг
Тангль (Будапешт, Венгрия)	крутильных весов с разгруженной крутильной нитью	свинцовые бруски, по 250 г	
Зарадничек (Брно, Чехословакия)	резонансный метод крутильных колебаний и динамический	свинцовые шары, по 9,4 г	свинцовые шары, по 11,3 кг
Гершун (Россия) (только идея опыта)	изменение уровня поверхности потенциала притяжения	ртуть, разлитая по поверхности	платиновый шар

ные помехи в ртути, осуществить автоматический поворот внешних притягивающих масс, проводить эксперимент за городом и т. д.

В табл. 11 отсутствуют значения постоянной тяготения и средней плотности Земли, связанные с именами Ласки, Тангля и Гершуна, ибо все они самих опытов не ставили. Ласка ограничился лишь высказыванием идеи опыта, Гершун разработал также теорию и сделал расчеты. Тангль изготовил аппаратуру, описанную в § 23, но использовал ее не для определения постоянной тяготения,

Следует подчеркнуть перспективность высказанной Бюргессом идеи повышения чувствительности крутильных весов путем компенсации действия силы тяжести на крутильную систему. Действительно, следует только уменьшить действующую силу вдвое, как становится возможным при том же запасе прочности на разрыв применить нить вдвое меньшей площади поперечного сечения, или в $\sqrt{2}$ раза меньшего диаметра. Жесткость же нити при этом уменьшится в четыре раза, а чувствительность возрастает во столько же раз. Если сила тяжести уменьшится в n раз, то при том же запасе прочности нити на разрыв чувствительность крутильных весов возрастает в n^2 раз.

Компенсацию действия силы тяжести можно реализовать, используя не только архимедову выталкивающую силу, как делал Бюргесс. Имеет смысл рассмотреть возможность использования других аналогичных компенсирующих сил (магнитных, электростатических и др.). Очевидно также, что описанные способы компенсации силы тяжести можно использовать не только для разгрузки нити в вертикальных крутильных весах Мичела — Кавендиша, но и в приборах типа весов Йолли.

Кратковременная компенсация действия ускорения силы тяжести возникает, если чувствительную систему весов, предназначенную для измерения притяжения между взаимодействующими массами, вращать вокруг горизонтальной оси. Тогда на систему будет действовать центробежное ускорение. Направление его совпадает с направлением радиуса вращения. Подбором угловой скорости и радиуса вращения можно добиться того, что в крайнем верхнем положении действующая на чувствительную систему сила тяжести будет компенсироваться силой центробежного ускорения. Кратковременная, периодически повторяющаяся невесомость может быть использована в экспериментах по определению постоянной тяготения.

На первый взгляд кажется, что для опытов можно использовать невесомость в свободно падающей камере. Однако невесомость в условиях свободного падения в течение даже небольшого отрезка времени осуществить технически трудно. В лифте высотой 80 м свободное падение продолжается всего лишь 4 сек. Гораздо более эффективно невесомость осуществляется в свободно летящем ис-

кусственном спутнике Земли. При этом в течение длительного времени наблюдается стабильная невесомость. В условиях невесомости можно, в частности, использовать крутильные весы с очень тонкой нитью, т. е. достичь очень большой чувствительности весов. Трудности точного измерения массы, размеров масс и расстояний между ними остаются такими же, как и в земных условиях. Но измерения придется производить, конечно, без наблюдателя.

При проведении опытов на спутнике возникает дополнительная проблема тщательного учета центробежных сил, ибо известно, что полная компенсация силы тяжести центробежной силой летящей ракеты происходит только в центре тяжести ракеты. В остальных же точках спутника сохраняются остаточные разности ускорений силы тяжести и центробежного ускорений, которые будут действовать на чувствительную систему прибора, имеющую конечные размеры. Ныне обсуждается идея постановки некоторых гравитационных опытов на спутниках для измерения малых гравитационных эффектов.

§ 26. Замечания об опытах по определению зависимости постоянной тяготения от различных факторов

В заключение приведем беглый обзор работ, преследовавших цель выявить зависимость тяготения от различных условий, состава и состояния взаимопритягивающихся масс. Часть из этих опытов предпринималась, несмотря на то, что искомые зависимости не предсказывались на основании какой-либо из существовавших теорий. Они ставились в расчете, что при любом результате опыта, особенно при положительном (т. е. при обнаружении какой-нибудь из этих зависимостей), опыт мог явиться толчком для дальнейшей разработки теории тяготения. Другая часть опытов базировалась на теориях, которые являлись дискуссионными и результаты опытов могли подтвердить или опровергнуть ту или иную теорию. Но поскольку каждый из опытов имеет ограниченную точность, постольку и то или иное утверждение, выведенное на основании опыта, верно с определенной точностью. Некоторые из опытов были проведены с современной точки

зрения не на высоком техническом уровне и имеют вследствие этого низкую относительную точность. Поэтому повторение, по крайней мере части из них, представляет определенный интерес.

Зависимость постоянной тяготения от состава взаимопритягивающихся масс. Впервые попытку обнаружить эту зависимость предпринял еще сам Ньютон. С этой целью он провел измерение периода колебания маятника, чечевица которого была то деревянной, то латунной. Оказалось, что с точностью до 10^{-3} нет различия в притяжении Земли чечевицы маятника. Ньютон был твердо убежден, что сила тяготения зависит только от величины массы, но не от состава притягивающихся тел. Опыты Ньютона были повторены Бесселем с относительной точностью $1,6 \cdot 10^{-5}$. Позже к ним возвращались многие экспериментаторы.

Пойнтинг и Грей [83] с помощью крутильных весов пытались обнаружить изменения притяжения двух кусков кварца при различных их ориентациях. Аналогичные опыты позднее осуществил с исландским шпатом А. Маккензи [73]. Взвешивание кристаллов, по-разному ориентированных в гравитационном поле Земли, произвел Хейл [57]. Л. Созернс [93] провел опыты по обнаружению изменения тяготения между радиоактивными массами. Во всех этих опытах, в одних с большей, в других с меньшей точностью, изменение постоянной тяготения обнаружено не было. В последнее время были осуществлены эксперименты по проверке возможного существования спиновой анизотропии гравитации для тел с поляризованными ядрами, которые показали, что в пределах точности опытов такой зависимости нет [5].

При определении постоянной тяготения в качестве притягивающихся масс неоднократно использовались тела из различного материала. На наш взгляд разнообразный состав взаимопритягивающихся масс при таких определениях вряд ли целесообразен. Независимость тяготения от состава притягивающихся масс более точно может быть определена из специальных дифференциальных опытов — типа опытов Этвеша. В частности, из результатов экспериментов самого Этвеша (с точностью $6 \cdot 10^{-9}$) [51] и опытов Дике (с точностью $3 \cdot 10^{-10}$) [40] можно считать уста-

новленным, что постоянная тяготения (в пределах достигнутой точности) не зависит от состава притягивающихся масс. Правда, опыты Этвеша претендуют на большее, так как позволяют вывести фундаментальное свойство гравитирующей и инертной масс — их эквивалентность. Подробно последние опыты типа Этвеша описаны в обзоре Дике [10], к которому мы и отсылаем читателя.

Зависимость постоянной тяготения от температуры притягивающихся масс. Одинаковое число элементарных частиц (протонов, электронов, нейтронов) имеет разную массу в зависимости от их размещения, а следовательно, и от энергии системы. Когда изменяется энергия системы, то изменяется притяжение этой массы Землей, т. е. должен изменяться вес системы в зависимости от ее температуры.

Специальные исследования по выявлению зависимости постоянной тяготения от температуры провели Пойнтинг и П. Филлипс [84]. Они производили взвешивание стального цилиндра весом в 266,17 г при изменении его температуры от $+100^\circ$ до температуры жидкого воздуха. Опыты были повторены с цилиндрами, весившими по 58 и по 187 г. В итоге Пойнтинг и Филлипс пришли к выводу, что изменение постоянной тяготения, если оно и существует, не превосходит 10^{-9} ее величины при изменении температуры на 1°C . Созернс [93] с той же целью установил на весах катушку тонкой платиновой проволоки, намотанной безындукционно на слюдяную рамку. Точное взвешивание катушки производилось при разрежении воздуха до 1,6—5 мм рт. ст. Проволока нагревалась электрическим током. В опытах Созернса по сравнению с опытами Пойнтинга более точно осуществлялась дистанционная регистрация показаний весов, отсутствовало влияние конвективных потоков воздуха и т. д. Однако меньший диапазон изменения температуры ($\Delta t = 35^\circ$) повлиял на результат: было получено, что температурные изменения тяготения на 1° , если они существуют, составляли меньше 10^{-8} от величины тяготения.

П. Шоу и Н. Дави [90] провели серию опытов по определению зависимости тяготения от температуры. Они использовали крутильную систему с кварцевой нитью. К коромыслу подвешивались два серебряных шара.

В качестве притягивающей массы были взяты сорокакилограммовые свинцовые шары. Измерялось притяжение серебряных шаров притягивающими свинцовыми шарами при различных температурах от 0° до 250° С. Различие отклонений крутильной системы при разных температурах находилось в пределах ошибок измерений. Это заставило авторов отказаться от выводов, полученных на основании их более ранних опытов [91], когда якобы обнаруживалась корреляция тяготения с температурой.

З а в и с и м о с т ь в з а и м н о г о т я г о т е н и я
о т п р и с у т с т в и я д р у г и х м а с с . Возможность влияния посторонних масс на гравитационное взаимодействие двух других масс следует из нелинейных уравнений общей теории относительности. Такое влияние может появиться в силу неаддитивности гравитационного поля.

Первые заслуживающие внимания экспериментальные определения влияния промежуточной среды на гравитационное взаимодействие масс были проведены Л. Аустином и Ч. Твингом [28], которые экранировали массы в крутильных весах типа Кавендиша слоем масс различной плотности. Ошибки наблюдений не позволили сделать каких-либо определенных выводов.

Серию тщательно поставленных экспериментов осуществил в 1919—1930 гг. итальянский физик К. Майоран [74]. Он исходил из предположения, что если между двумя взаимопритягивающимися массами поместить экранирующую массу, то взаимное притяжение уменьшится на величину, пропорциональную величине притяжения, плотности и толщине экранирующего слоя масс. Коэффициент пропорциональности h в этой зависимости был назван коэффициентом экранизации тяготения. Говоря о зависимости взаимного тяготения двух масс от наличия других масс, уместно подчеркнуть, что из общей теории относительности следует возможность такой зависимости не только от присутствия экранирующих масс по направлению гравитационного взаимодействия пробных масс, но и при расположении масс в стороне. Майоран решил проверить изменение веса экранируемой от Земли массы. Экранирование осуществлялось помещением взвешиваемой массы внутри полого шара. В экспериментах Майора-

на якобы наблюдалось изменение веса экранированной массы, которое соответствует коэффициенту экранизации порядка $h = 10^{-12} \text{ см}^2/\text{г}$.

В начале двадцатых годов Г. Рессел [89] рассмотрел астрономические следствия предположения, что экранизация тяготения существует. Если принять значение коэффициента h , найденное Майораном, то должны наблюдаться заметные аномалии движения Луны и планет, приливные явления на Земле и другие эффекты. Поскольку такие явления не обнаружены, то Рессел пришел к заключению, что $h < 10^{-15} \text{ см}^2/\text{г}$. Сходную оценку получили И. И. Кагальникова и В. В. Радзиевский [16], которые по амплитуде приливов нашли $h < 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2/\text{г}$.

Гармонический анализ приливных лунно-солнечных изменений силы тяжести, проведенный в ГАИШ, показал, что с точностью $10^{-13} \text{ см}^2/\text{г}$ отсутствует экранизация телом Земли гравитационного действия Луны и Солнца. Рассматриваемый эффект неоднократно проверялся во время полных солнечных затмений. Измерения были проведены 30 июля 1954 г. Р. Томашеком [99], 19 апреля 1958 г. Т. Окуда [78], 15 февраля 1961 г. Ю. С. Доброхотовым, Н. Н. Парийским и В. И. Лысенко [12], Л. Шлихтером, М. Капуто и К. Хагером [92], Р. Томашеком и Е. Гротеном [100] и др. При точности современных гравиметров порядка 10^{-9} см/сек^2 отсутствие эффекта изменения силы тяжести во время затмения Солнца говорит о том, что на расстоянии Земли притяжение Солнца вследствие экранизации не изменяется более чем на $2 \cdot 10^{-6}$ ее величины, что соответствует $h < 10^{-14} \text{ см}^2/\text{г}$. Применив статистический анализ результатов наблюдений силы тяжести во время полного солнечного затмения 15 февраля 1961 г., авторы работы [100] показали, что с вероятностью 0,95 можно утверждать, что коэффициент экранизации тяготения (если она существует) $h < 2,6 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2/\text{г}$. Н. П. Грушинский и М. У. Сагитов из анализа результатов наблюдений силы тяжести во время затмений пришли к заключению, что наблюдавшиеся иногда изменения показаний гравиметров в момент затмения соответствуют прямым или косвенным температурным и барометрическим эффектам в гравиметрах, сопутствующим всякому затмению [9].

В 1962 г. эксперименты по определению влияния промежуточной среды на гравитационное взаимодействие масс провели В. Б. Брагинский, В. Н. Руденко и Г. И. Рукман [3]. Оптимальное радиотехническое устройство для выделения слабых периодически повторяющихся сигналов на фоне шумов применялось для регистрации изменения веса латунной массы 10 кг при экранировке ее стальным ротором толщиной в 10 см. Ротор вращался с частотой 0,15 гц, периодически экранируя от притяжения Земли латунную массу.

Для исключения эффекта непосредственного взаимного притяжения латунной массы ротором другая такая же латунная масса располагалась симметрично относительно экранирующего ротора, будучи жестко связанной с первой. Лопасти ротора, заходя между латунными массами, экранировали только верхнюю латунную массу от притяжения Земли. Авторы использовали также модуляционную методику и статистические методы обработки результатов наблюдений. Основываясь на результатах опытов, авторы утверждают, что эффекта изменения гравитационного взаимодействия, составляющего $2 \cdot 10^{-10}$ от величины полного взаимодействия, при наличии промежуточного слоя масс нет с вероятностью 0,998.

В 1965 г. опыты были повторены В. Б. Брагинским и В. К. Мартыновым [4] с усовершенствованной аппаратурой и методикой. Эффект изменения гравитационного взаимодействия масс при наличии промежуточных масс опять не был обнаружен. Было установлено, что изменения, составляющего $5 \cdot 10^{-12}$ от полного взаимодействия пробных масс, нет с вероятностью 0,95.

При дифференциальных опытах по измерению изменения гравитационного взаимодействия вследствие экранирования целесообразно использовать астрономические массы (Солнце, Земля, Луна). Это позволяет при достаточно грубых измерениях эффекта тяготения, который сам по себе относительно велик, получать достаточно высокие пределы коэффициента h . Однако это не исключает необходимости постановки лабораторных опытов.

В заключение отметим работу И. И. Кагальниковой [15], где содержится интересный обзор, посвященный истории развития нерелятивистских представлений о природе

гравитации. В частности, в этом обзоре более подробно, чем у нас в настоящем параграфе, описаны опыты Майорана, рассуждения Рессела и др. и дан анализ их исследований.

Дискуссия об изменении постоянной тяготения во времени и проекты опытов по его обнаружению. Ныне в современной физике усиленно дискутируется вопрос о переменности постоянной тяготения во времени и в пространстве. Около тридцати лет назад известный физик П. Дирак [49] выдвинул идею изменения постоянных во времени. Постоянная тяготения, по Дираку, должна уменьшаться обратно пропорционально возрасту Вселенной. Идеи Дирака были развиты П. Иорданом [66], Дике [11], [48], их поддерживает Д. Д. Иваненко [14] и др. К. П. Станюкович [23], исходя из других соображений, чем указанные авторы, приходит к мысли, что размерная постоянная тяготения меняется со временем и зависит от местных условий во Вселенной. По К. П. Станюковичу, постоянная тяготения должна увеличиваться со временем. Более осторожен Дж. Уиллер [24], считающий не очевидным, что эффект изменения постоянной тяготения во времени будет несовместим с общей теорией относительности. Идея изменения постоянной тяготения во времени находит резкое возражение со стороны Я. Б. Зельдовича [13] и ряда других авторов. Я. Б. Зельдович считает, что концепция переменности постоянной тяготения находится в противоречии с общей теорией относительности. Этого не отрицает и сам Дирак. Так или иначе, перед физиками и астрономами стоит актуальный вопрос: изменяется или не изменяется постоянная тяготения во времени? Будущие опыты должны ответить на этот вопрос.

Согласно гипотезе Дирака — Иордана изменение постоянной тяготения в год должно составлять около 10^{-10} ее величины. Для такой точности постановка в лабораторных условиях опыта по определению изменения взаимного притяжения двух масс не эффективна. Трудности наблюдения векового хода тяготения возникают в силу того, что в самой аппаратуре происходят вековые изменения параметров, так как меняются механические, физические и химические свойства материалов.

Более перспективна проверка гипотезы изменчивости постоянной тяготения с помощью искусственных спутников Земли. Изменение постоянной тяготения должно привести к изменению силы притяжения спутника Земли. Это в свою очередь приведет согласно третьему закону Кеплера к изменению периода обращения спутника вокруг Земли. Как показывает равенство (8), постоянная тяготения обратно пропорциональна второй степени периода T . Большое влияние на движение искусственных спутников Земли оказывают сопротивление земной атмосферы и микрометеоритные частицы. Для того чтобы избавиться от этого влияния, М. Шварцшильд остроумно предложил окружить спутник полой оболочкой, чтобы все сопротивление среды межпланетного пространства действовало на эту оболочку. Должно регистрироваться положение спутника, расположенного внутри полой оболочки, относительно этой оболочки и положение оболочки относительно Земли. Из совокупности этих данных можно получить невозмущенное сопротивлением среды положение спутника относительно Земли. Гравитационное взаимодействие между спутником и оболочкой должно учитываться дополнительно. В проекте Шварцшильда предлагается нечто аналогичное тому, что было осуществлено П. И. Агалецким [1] при определении абсолютной силы тяжести в Ленинграде «методом совмещенного падения». Метод Агалецкого состоял в том, что в его опыте стержень падал внутри вакуумной камеры, которая одновременно сама падала, воспринимая на себя все сопротивление воздуха.

Авторы проекта эксперимента по проверке изменения постоянной тяготения во времени утверждают, что регистрацию с помощью атомных стандартов частоты с точностью до 10^{-11} периода обращения спутника можно осуществить в течение года. Имеются общие рекомендации относительно орбиты спутника для решения этой задачи. Однако с точки зрения небесно-механической эксперимент не подготовлен. Нет еще такой теории движения искусственного спутника, которая учитывала бы все возникающие возмущения и обеспечивала бы определение периода обращения спутника вокруг Земли с необходимой точностью. Помимо учета возмущений от Луны и Солнца и возму-

щений за счет неоднородности внутреннего строения и неправильности фигуры Земли, необходим учет возмущений от планет, от несферичности Солнца и Луны, от околоземных масс, создающих зодиакальный свет, от светового давления и от др. причин. Необходимо также учитывать релятивистские эффекты. Мы ничего не знаем о вековых и долгопериодических перемещениях масс внутри Земли и в ее окрестностях, которые изменяют гравитационное поле. Напомним, что речь идет об учете эффектов порядка $10^{-10} f$.

Проекты опытов по определению изменения постоянной тяготения в зависимости от скорости движения притягивающихся масс относительно удаленной материи. Дике[11] полагает, что гравитационное взаимодействие масс зависит от скорости их движения относительно удаленной материи Вселенной. Такие изменения скорости в пространстве будут происходить, например, при годичном обращении Земли вокруг Солнца. Следовательно, должно происходить периодическое изменение постоянной тяготения во времени. Дике при выдвижении своей гипотезы исходил из допущения справедливости принципа Маха, этот принцип состоит в том, что сила инерции рассматривается как результат гравитационного влияния удаленной материи. Этот принцип, однако, сам является весьма дискуссионным в современной физике.

Согласно Дике годичное изменение постоянной тяготения должно в принципе проявляться в годичном изменении хода маятниковых часов на Земле, геоцентрической долготы Луны, продолжительности земных суток и т. д. Анализ показывает, что современная точность определения хода маятниковых часов не позволяет обнаружить эти эффекты ввиду больших по величине посторонних влияний на ход часов, коррелируемых по времени. Наблюдения изменения долготы Луны также неэффективны из-за их недостаточной точности. Амплитуда годичных изменений долготы Луны вследствие изменения постоянной тяготения должна быть менее $0'',1$. Кроме того, отсутствует достаточно точная теория и методика учета всех возмущений в движении Луны.

Дике возлагает надежды на определение годичного изменения постоянной тяготения по наблюдениям периода обращения искусственного спутника вокруг Земли. Требования к определению периода обращения искусственного спутника при решении этой задачи на порядок ниже, чем в задаче определения векового изменения постоянной тяготения.

Обсуждаются также проекты опытов по обнаружению зависимости постоянной тяготения от положения притягивающих масс относительно других масс Вселенной. В этих опытах речь идет о годичных относительных изменениях постоянной тяготения порядка 10^{-10} .

В заключение еще раз подчеркнем, что идея об изменении постоянной тяготения во времени, в зависимости от скорости движения притягивающихся масс, их положения в пространстве, заполненном другими массами, является дискуссионной с теоретических позиций. Она имеет много сторонников и еще больше противников. Отсюда и дискуссионность многих предложенных опытов.

Основной вывод, который следует сделать из настоящего параграфа, состоит в том, что зависимость постоянной тяготения от различных факторов, если она и есть, должна определяться из дифференциальных опытов. Эти зависимости не могут быть обнаружены из абсолютных измерений кавендиша гравитационной постоянной, точность которых на много порядков ниже, чем дифференциальных измерений.

Уточненная теория определения постоянной тяготения с помощью крутильных весов

§ 27. Постановка задачи

В настоящей главе рассматривается теория крутильных колебаний крутильной системы в неоднородном гравитационном поле притягивающих масс. Под крутильной системой подразумевается коромысло, несущее на концах массы и подвешенное за середину на тонкой идеально упругой нити, вокруг оси которой могут совершаться крутильные колебания. Размеры, взаимное положение и распределение плотности масс крутильной системы и притягивающих ее масс предполагаются точно известными. Крутильная система, выведенная из положения равновесия и представленная самой себе, начинает совершать затухающие колебания. Период колебаний зависит от постоянной упругой нити, постоянной тяготения и коэффициента, характеризующего вязкое сопротивление. При составлении дифференциального уравнения крутильных колебаний учитывается момент сил притяжения, момент упругих сил нити и момент сил вязкого сопротивления движению крутильной системы. Теория крутильных колебаний рассматривается ниже с точки зрения использования ее для определения постоянной тяготения.

В дальнейшем представляется удобным придерживаться следующей последовательности изложения. Сначала рассматривается выражение момента сил притяжения относительно оси нити между элементарной массой крутильной системы и точечной притягивающей массой. Затем в общем виде выводится выражение момента сил притяжения для крутильной системы и притягивающей массы, имеющих производную форму и плотность. После этого составляется дифференциальное уравнение крутильных

колебаний. Его решение находится асимптотическим методом, успешно применяющимся в теории нелинейных колебаний. При этом используется методика решения, изложенная в книге Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [2]. Приводятся два приближения в решении задачи, которые оказываются достаточными. В заключение дается анализ решения с целью определения постоянной тяготения.

§ 28. Момент сил притяжения

Займемся выводом момента сил притяжения между крутильной системой и притягивающими массами. Аналитическое выражение момента сил в случае тел произвольной формы и плотности получается достаточно сложным.

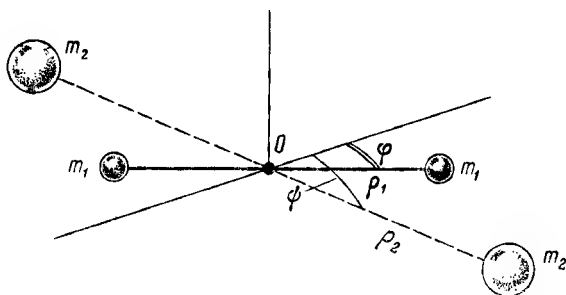


Рис. 24. Схема расположения притягивающихся масс m_1 и m_2 .

Выведем сначала формулу для момента сил притяжения между шаровой массой m_1 крутильной системы и шаровой притягивающей массой m_2 , расположенной в той же горизонтальной плоскости, что и масса m_1 . Обозначим расстояние массы m_1 от оси нити через ρ_1 . Ее отклонение в горизонтальной плоскости от некоторого исходного направления в этой плоскости будем характеризовать углом φ (рис. 24). За исходное направление удобно принять направление равновесного положения крутильной системы. Расстояние массы m_2 от оси нити обозначим ρ_2 , а угол между направлением на массу m_2 и исходным направлением — через φ . Предполагается, что $\rho_2 > \rho_1$.

В опытах по определению постоянной тяготения крутильная масса изготавливается симметричной относительно оси нити. Симметрично располагаются и притягивающие массы. Поэтому рассмотрим момент сил притяжения между двумя массами m_1 , симметрично расположенными на концах невесомого коромысла, и двумя притягивающими массами m_2 , симметричными относительно оси крутильной нити. Сила взаимного притяжения между двумя близкими массами m_1 и m_2 выражается так:

$$F_1 = \frac{fm_1m_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi - \psi)},$$

а между дальними массами m_1 и m_2 —

$$F_2 = \frac{fm_1m_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\pi + \varphi - \psi)}.$$

Момент сил притяжения, действующий на рассматриваемую элементарную крутильную систему, выражается равенством

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi) = 2fm_1m_2\rho_1\rho_2 \left[\frac{\sin(\varphi - \psi)}{[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi - \psi)]^{3/2}} - \frac{\sin(\varphi - \psi)}{[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\pi + \varphi - \psi)]^{3/2}} \right]. \quad (57)$$

Преобразуем выражение (57), введя для упрощения новые обозначения:

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi) = A \left[\frac{1}{(1 - 2a \cos(\varphi - \psi) + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 - 2a \cos(\pi + \varphi - \psi) + a^2)^{3/2}} \right] \sin(\varphi - \psi), \quad (58)$$

где

$$A = \frac{2fm_1m_2\rho_1}{\rho_2^3}, \quad a = \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1.$$

Напишем производящую функцию для полиномов Лежандра $P_n(\cos(\varphi - \psi))$:

$$\frac{1}{(1 - 2a \cos(\varphi - \psi) + a^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n P_n(\cos(\varphi - \psi)). \quad (59)$$

Возьмем производную по φ от обеих частей равенства (59)

и умножим обе части на величину $-\frac{A}{a}$:

$$\frac{A \sin(\varphi - \psi)}{(1 - 2a \cos(\varphi - \psi) + a^2)^{3/2}} = -\frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} Aa^{n-1} P_n(\cos(\varphi - \psi)). \quad (60)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \frac{A \sin(\varphi - \psi)}{(1 - 2a \cos(\pi + \varphi - \psi) + a^2)^{3/2}} = \\ = -\frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} Aa^{n-1} P_n(\cos(\pi + \varphi - \psi)). \quad (61) \end{aligned}$$

Опираясь на равенства (58), (60) и (61), напомним выражение для момента сил притяжения в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi) = -\frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} Aa^{n-1} P_n(\cos(\varphi - \psi)) + \\ + \frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} Aa^{n-1} P_n(\cos(\pi + \varphi - \psi)). \quad (62) \end{aligned}$$

Представим выражение (62) для $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi)$ в виде ряда Маклорена по степеням малого угла φ :

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} [\mathfrak{M}_{\text{пр}}^{(k)}(\varphi, \psi)]_{\varphi=0},$$

где

$$\begin{aligned} [\mathfrak{M}_{\text{пр}}^{(k)}(\varphi, \psi)]_{\varphi=0} = -A \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \left[\frac{d^{k+1} P_n(\cos(\varphi - \psi))}{d\varphi^{k+1}} - \right. \\ \left. - \frac{d^{k+1} P_n(\cos(\pi + \varphi - \psi))}{d\varphi^{k+1}} \right]_{\varphi=0}. \end{aligned}$$

Теперь выражение для $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi)$ можно написать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi) = -\frac{2fm_1m_2}{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left[\frac{d^{k+1} P_n(\cos(\varphi - \psi))}{d\varphi^{k+1}} - \right. \\ \left. - \frac{d^{k+1} P_n(\cos(\pi + \varphi - \psi))}{d\varphi^{k+1}} \right]_{\varphi=0}. \quad (63) \end{aligned}$$

Коэффициенты при различных степенях угла φ обозначим

$$\alpha_k = \frac{2fm_1m_2}{\rho_2 k!} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left[\frac{d^{k+1}P_n(\cos(\pi + \varphi - \psi))}{d\varphi^{k+1}} - \frac{d^{k+1}P_n(\cos(\varphi - \psi))}{d\varphi^{k+1}} \right]_{\varphi=0};$$

тогда выражение момента сил притяжения (63) перепишется в следующем компактном виде:

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\psi) \varphi^k. \quad (64)$$

Если крутильная система с массами m_1 и притягивающие массы m_2 симметричны относительно оси крутильной нити, то

$$P_n(-\cos(\varphi - \psi)) = P_n(\cos(\varphi - \psi)), \quad n - \text{четно},$$

$$P_n(-\cos(\varphi - \psi)) = -P_n(\cos(\varphi - \psi)), \quad n - \text{нечетно}.$$

Имея в виду последние соотношения для полиномов Лежандра, перепишем выражение для α_k следующим образом:

$$\alpha_k(\psi) = -\frac{4fm_1m_2}{\rho_2 k!} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} a^n \left[\frac{d^{k+1}P_n(\cos(\varphi - \psi))}{d\varphi^{k+1}} \right]_{\varphi=0}. \quad (65)$$

Для вычисления производных от полиномов Лежандра можно воспользоваться известным соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}P_n(\cos(\varphi - \psi))}{d\varphi^{k+1}} &= \\ &= 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2n-2i-1)!! (2i-1)!! (-1)^{E\left(\frac{k+2}{2}\right)}}{(2n-2i)!! (2i)!!} \times \\ &\times (n-2i)^{k+1} \begin{cases} \cos(n-2i)(\varphi - \psi), & k - \text{нечетно}, \\ \sin(n-2i)(\varphi - \psi), & k - \text{четно}. \end{cases} \end{aligned} \quad (66)$$

Верхний предел в сумме равенства (66) равен такому числу, что ряд обрывается членом, множителем которого является одна из функций $\sin 0$, $\sin (\varphi - \psi)$, $\cos 0$, $\cos (\varphi - \psi)$.

Выражение (65) для коэффициентов α_k с учетом (66) и положив $\varphi = 0$, можно записать в виде

$$\alpha_k(\psi) = \frac{8f m_1 m_2}{\rho_2 k!} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2n-2i-1)!! (2i-1)!! (n-2i)^{k+1}}{(2n-2i)!! (2i)!!} \times \\ \times (-1)^{E\left(\frac{k+2}{2}\right)} \begin{cases} -\cos(n-2i)\psi, & k - \text{нечетно,} \\ \sin(n-2i)\psi, & k - \text{четно.} \end{cases} \quad (67)$$

Преобразуем двойной ряд в равенстве (67), чтобы суммирование по аргументу тригонометрических функций было однократным. Тогда

$$\alpha_k(\psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k,l} \begin{cases} \sin(2l+1)\psi, & k - \text{четно,} \\ -\cos(2l+1)\psi, & k - \text{нечетно,} \end{cases} \quad (68)$$

где

$$\alpha_{k,l} = \frac{8f m_1 m_2 a}{\rho_2 k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{2l+2j} (2l+1)^{k+1} (2j-1)!! (2j+1+4l)!! (-1)^{E\left(\frac{k+2}{2}\right)}}{(2j)!! (2j+2+4l)!!}. \quad (69)$$

Таким образом, равенство (69) показывает, что коэффициенты $\alpha_k(\psi)$ в разложении момента сил притяжения являются сложной функцией угла ψ .

Для примера приведем развернутые выражения для первых двух коэффициентов α_k , т. е. для α_0 и α_1 :

$$\alpha_0 = -\frac{4f m_1 m_2 a}{\rho_2} \left[\left(a^0 + \frac{3}{8} a^2 + \frac{15}{64} a^4 + \dots \right) \sin \psi + \right. \\ \left. + \left(\frac{15}{8} a^2 + \frac{105}{128} a^4 + \frac{567}{1024} a^6 + \dots \right) \sin 3\psi + \left(\frac{315}{128} a^4 + \frac{1155}{1024} a^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{6435}{8192} a^8 + \dots \right) \sin 5\psi + \dots \right], \\ \alpha_1 = \frac{4f m_1 m_2 a}{\rho_2} \left[\left(a^0 + \frac{3}{8} a^2 + \frac{15}{64} a^4 + \dots \right) \cos \psi + \right. \\ \left. + \left(\frac{45}{8} a^2 + \frac{315}{128} a^4 + \frac{1701}{1024} a^6 + \dots \right) \cos 3\psi + \left(\frac{1575}{128} a^4 + \frac{5775}{1024} a^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{32175}{8192} a^8 + \dots \right) \cos 5\psi + \dots \right].$$

Таблица 13

$k \backslash l$	0	1	2	3	4	5
0	-0,2779	-0,1327	-0,0438	-0,0131	-0,0037	-0,0010
1	-0,2779	-0,3980	-0,2191	-0,0917	-0,0336	-0,0114
2	+0,1390	+0,5971	+0,5477	+0,3208	+0,1512	+0,0627
3	+0,0463	+0,5971	+0,9128	+0,7486	+0,4537	+0,2298
4	-0,0116	-0,4478	-1,1410	-1,3100	-1,0208	-0,6320
5	-0,0023	-0,2690	-1,1410	-2,1249	-1,8374	-1,3904

$k \backslash l$	6	7	8	9	10
0	-0,003	-0,0001	0	0	0
1	-0,0037	-0,0011	-0,0003	-0,0001	0
2	+0,0239	+0,0085	+0,0029	+0,0010	+0,0003
3	+0,1034	+0,0427	+0,0166	+0,0061	+0,0022
4	-0,3360	-0,1603	-0,0705	-0,0291	-0,0011
5	-0,8736	-0,4308	-0,2396	-0,1106	-0,04800

В табл. 13 приведены числовые значения коэффициентов $\frac{\alpha_{k,l} \rho_2}{8 f m_1 m_2}$ вычисленные для $a = 0,5$ и для ряда последовательных значений k и l . При этом мы ограничились коэффициентами членов до φ^5 , в предположении, что амплитуда колебаний крутильной системы достаточно мала ($\varphi_{\max} < 2^\circ$). Тогда φ^5 не будет превышать $5 \cdot 10^{-8}$ радиана. В таблице приведены значения коэффициентов $\frac{\alpha_{k,l} \rho_2}{8 f m_1 m_2}$ для краткости только с четырьмя значащими цифрами. Но она дает качественное представление о характере изменения этих значений.

Момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi)$ изменяется в зависимости от разности углов $\varphi - \psi$ и отношения $a = \rho_1/\rho_2$. Характер этого изменения представлен на рис. 25. Кривые $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ рассчитаны для a , равного 0,9, 0,67 и 0,2. При определении постоянной тяготения притягивающие массы помещаются так, чтобы они оказывали максимальное действие на крутильную систему. Взаимное положение масс m_1 и m_2 характеризуется в нашем случае отношением a и углом $\varphi - \psi$. Для определения максимального

значения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi - \psi)$ по переменной $\varphi - \psi$ при фиксированном значении a запишем условие экстремума

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi)}{\partial (\varphi - \psi)} = 0. \quad (70)$$

Выражение $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ в уравнении (70) удобнее использовать в виде (57). Точное аналитическое решение несколько затруднительно, поэтому проще решать уравнение одним

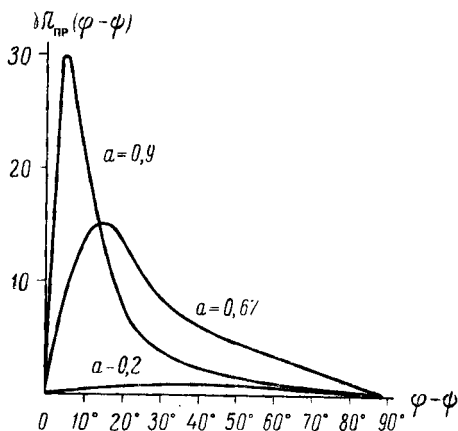


Рис. 25. График изменения момента сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi - \psi)$ в зависимости от угла $\varphi - \psi$ и параметра $a = R/\rho$.

из приближенных методов, в частности, графически. Как следует из рис. 25, максимумы функций $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ наступают соответственно при значениях $\varphi - \psi$, равных 5, 15 и 45°. По мере увеличения отношения a максимум функций $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ смещается к направлению, совпадающему с направлением продольной оси коромысла.

Рассмотрим теперь в несколько более общем виде момент сил притяжения в случае коромысла и масс произвольной формы и плотности.

Пусть Ω_1 — крутильная система произвольной формы и плотности — подвешена на тонкой нити, так что она может совершать вокруг оси нити крутильные колебания. Элемент массы системы обозначим через dm_1 . Введем сфе-

рическую систему координат так, что ее начало совмещено с центром тяжести крутильной системы. Расстояние элемента массы dm_1 тела Ω_1 от начала координат обозначим через R ; $\bar{\varphi}$ — угол в горизонтальной плоскости между

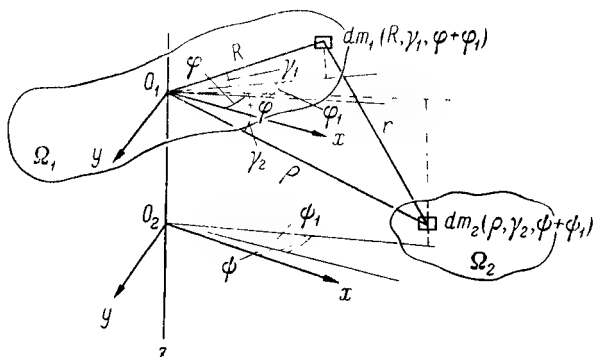


Рис. 26. К выводу момента сил притяжения между массами, имеющими произвольную форму и плотность.

направлением на элемент dm_1 и некоторым исходным направлением (рис. 26); γ_1 — угол в вертикальной плоскости, между горизонтальной плоскостью и направлением на элемент dm_1 . Аналогично выбраны координаты элемента dm_2 другого тела Ω_2 , которое в нашей задаче будет играть роль притягивающей массы. Эти координаты $(\rho, \bar{\psi}, \gamma_2)$ отмечены на том же рис. 26. Расстояние между элементарными массами dm_1 и dm_2 обозначим через r , а угол между радиусами-векторами R и ρ через α . Потенциал взаимного притяжения элементарных масс dm_1 и dm_2 запишется так:

$$dV = \frac{f dm_1 dm_2}{r} = \frac{f dm_1 dm_2}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \alpha}}.$$

Вводя обозначение $R/\rho = a < 1$, перепишем потенциал dV в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$dV = \frac{f dm_1 dm_2}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} a^n P_n(\cos \alpha). \quad (71)$$

Поскольку $\cos \alpha$ выражается по формулам сферической тригонометрии через координаты элементов dm_1 и dm_2 — $(\bar{\varphi}, \gamma_1)$ и $(\bar{\psi}, \gamma_2)$:

$$\cos \alpha = \cos \bar{\psi} \cos \bar{\varphi} + \sin \bar{\psi} \sin \bar{\varphi} \cos (\gamma_1 - \gamma_2),$$

то по теореме сложения сферических функций получим

$$P_n(\cos \alpha) = P_n(\cos \bar{\psi}) P_n(\cos \bar{\varphi}) + \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \bar{\psi}) P_n^m(\cos \bar{\varphi}) \cos m(\gamma_1 - \gamma_2), \quad (72)$$

где P_n^m — присоединенные функции Лежандра, которые выражаются через производные полиномов Лежандра.

Потенциал взаимного притяжения (71) элементарных масс dm_1 и dm_2 , учитывая равенство (72), можно переписать в виде

$$dV = \frac{f dm_1 dm_2}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left[P_n(\cos \bar{\psi}) P_n(\cos \bar{\varphi}) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \bar{\psi}) P_n^m(\cos \bar{\varphi}) \cos m(\gamma_1 - \gamma_2) \right].$$

Теперь легко определить момент сил притяжения, действующий на крутильную систему, относительно оси нити:

$$\frac{dV}{d\bar{\psi}} = \frac{f dm_1 dm_2}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left[P_n(\cos \bar{\varphi}) \frac{dP_n(\cos \bar{\psi})}{d\bar{\psi}} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \bar{\varphi}) \cos m(\gamma_1 - \gamma_2) \frac{dP_n^m(\cos \bar{\psi})}{d\bar{\psi}} \right].$$

Далее введем новые переменные, связанные с углами $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}$

$$\bar{\psi} = \psi + \psi_1,$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \varphi_1,$$

так, что углы φ и ψ представляют соответственно углы отклонения относительно прежнего исходного направления некоторых прямых, связанных жестко с телами Ω_1

и Ω_2 . Углы же ψ_1 и φ_1 отсчитываются относительно указанных прямых.

Теперь можно написать момент сил притяжения относительно оси нити крутильной системы для обоих тел Ω_1 и Ω_2 , составленных из элементарных масс dm_1 и dm_2 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi) = f \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \sum_{n=0}^{\infty} a^n & \left[P_n(\cos(\varphi + \varphi_1)) \times \right. \\ & \times \frac{dP_n(\cos(\psi + \psi_1))}{d\bar{\psi}} + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos(\varphi + \varphi_1)) \times \\ & \times \cos m(\gamma_1 - \gamma_2) \frac{dP_n^m(\cos(\psi_1 + \psi))}{d\bar{\psi}} \left. \right] \sigma_1 \sigma_2 R^2 \rho^2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \times \\ & \times d\gamma_1 d\gamma_2 d\psi_1 d\varphi_1 dR d\rho, \end{aligned}$$

где σ_1 и σ_2 соответственно плотности тел Ω_1 и Ω_2 , которые вообще могут быть функцией координат.

Функции $P_n^m(\cos(\psi + \psi_1))$ и $P_n^m(\cos(\varphi + \varphi_1))$ можно с помощью теоремы сложения сферических функций выразить через произведения присоединенных функций Лежандра, но аргументы их ψ , ψ_1 , φ , φ_1 будут уже разделенными. Поскольку интегрирование ведется по переменным $\psi_1, \varphi_1, \gamma_1, \gamma_2, R, \rho$, то момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ оказывается функцией переменных ψ и φ . Разлагая момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ в ряд по степеням малого угла отклонения φ , получим выражение

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi) = (\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi))_{\varphi=0} + \frac{\varphi}{1!} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} + \\ + \frac{\varphi^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi)}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=0} + \dots, \quad (73) \end{aligned}$$

в котором коэффициентами при степенях φ являются функции угла ψ . В случае симметрии притягивающихся масс относительно нити момент сил притяжения (73) будет содержать только нечетные степени угла φ .

Таким образом, момент сил притяжения в случае тел произвольной формы и плотности сводится к выражению (73), аналогичному равенству (64). Рассматривая угол ψ как функцию времени, можно использовать выражения

(64), (73) момента сил притяжения для описания гравитационного поля притягивающих масс, совершающих круговое движение вокруг оси нити крутильной системы. Характер крутильных колебаний в неоднородном и изменяющемся во времени гравитационном поле сильно усложняется.

§ 29. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний и его решение в первом приближении

Составим дифференциальное уравнение крутильных колебаний. При этом учтем рассмотренный выше момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi, \psi)$, момент упругих сил нити $\mathfrak{M}_{\tau}(\varphi)$, момент $\mathfrak{M}_c(d\varphi/dt)$ сил сопротивления воздуха движению коромысла и сил внутреннего трения в упругой нити. Момент $\mathfrak{M}_c(d\varphi/dt)$ предполагаем пропорциональным первой степени скорости $d\varphi/dt$ движения крутильной системы:

$$\mathfrak{M}_c\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 2\bar{\beta}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right), \quad (74)$$

где $\bar{\beta}$ — некоторый постоянный коэффициент, характеризующий величину сопротивления. Момент упругих сил рассматривается линейно зависящим от угла отклонения φ крутильной системы от положения равновесия:

$$\mathfrak{M}_{\tau}(\varphi) = \bar{\tau}\varphi. \quad (75)$$

Постоянный множитель $\bar{\tau}$ характеризует «жесткость» нити на закручивание. Его зависимость от длины, диаметра нити и модуля сдвига материала, из которого изготовлена нить, описывается формулой (47).

Опираясь на выражения моментов (73) — (75), можно, написать следующее дифференциальное уравнение крутильных колебаний коромысла в гравитационном поле других масс:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\bar{\beta} \frac{d\varphi}{dt} + \bar{\tau}\varphi + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\alpha}_k(\psi) \varphi^k = 0, \quad (76)$$

где J — момент инерции крутильной системы относительно

но оси нити. Уравнение (76) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение.

Решение полученного дифференциального уравнения (76) сложно. Поскольку оно не может быть получено в элементарных функциях, будем искать его приближенное решение. Для этого выделим в уравнении (76) часть членов, описывающих основное движение, а оставшиеся рассмотрим как возмущение основного движения. Такое представление возможно, ибо момент сил притяжения и момент сил сопротивления являются величинами малыми по сравнению с моментом упругих сил закрученной нити. Запишем уравнение (76) в виде

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \tau \varphi = \varepsilon \bar{F} \left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt} \right), \quad (77)$$

где

$$\bar{F} \left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt} \right) = -\frac{2\beta}{\varepsilon} \frac{d\varphi}{dt} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k(\psi)}{\varepsilon} \varphi^k,$$

ε — малый параметр, в качестве которого принимается постоянная тяготения f . Уравнение (77) перепишем так:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \tau \varphi = f F \left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (78)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\bar{\tau}}{J}, & F \left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt} \right) &= -2\beta \frac{d\varphi}{dt} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi^k, \\ \beta &= \frac{\bar{\beta}}{fJ}, & \alpha_k &= \frac{\bar{\alpha}_k}{fJ}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Искомое решение уравнения (78) представим в виде разложения

$$\varphi = a \cos \theta + f \varphi_1(a, \theta) + f^2 \varphi_2(a, \theta) + \dots \quad (80)$$

Первый член последнего равенства является решением уравнения (78) без правой части, т. е. без членов, описывающих возмущения. В решении (80) вспомогательные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ предполагаются периодическими функциями с периодом 2π относительно θ , а амплитуда a и скорость вращения фазы θ — переменными и их изме-

нения во времени представляются в виде разложения в ряд по степеням малого параметра f :

$$\frac{da}{dt} = fH_1(a) + f^2H_2(a) + \dots, \quad (81)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\tau} + fh_1(a) + f^2h_2(a) + \dots, \quad (82)$$

где $H_1(a), H_2(a), \dots, h_1(a), h_2(a), \dots$ — вспомогательные функции. Если бы удалось определить функции $\varphi_1(a, \theta), \varphi_2(a, \theta), \dots, H_1(a), H_2(a), \dots, h_1(a), h_2(a)$, то задача отыскания приближенного решения была бы разрешена. Поэтому дальнейшие выводы преследуют цель определения этих функций.

Дифференцируя дважды по времени t обе части равенства (80), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = & \left[\cos \theta + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + f^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial a} + \dots \right] \frac{d^2a}{dt^2} + \left[-a \sin \theta + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + f^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \dots \right] \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[f \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a^2} + f^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial a^2} + \dots \right] \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \\ & + \left[-a \cos \theta + f \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + f^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} + \dots \right] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \\ & + 2 \left[-\sin \theta + f \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a \partial \theta} + f^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial a \partial \theta} + \dots \right] \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \dots \end{aligned} \quad (83)$$

Используя равенства (80) и (83) для φ и $d^2\varphi/dt^2$, дифференциальное уравнение (77) можно переписать с преобразованной левой частью в следующем виде:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \tau\varphi = fG_1 + f^2G_2 + \dots, \quad (84)$$

где для краткости обозначено:

$$G_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} \tau + \tau \varphi_1 - 2a \sqrt{\tau} h_1 \cos \theta - 2 \sqrt{\tau} H_1 \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} G_2 = & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} \tau + \tau \varphi_2 - 2a \sqrt{\tau} h_2 \cos \theta - 2 \sqrt{\tau} H_2 \sin \theta + \\ & + \left(H_1 \frac{dH_1}{da} - ah_1^2 \right) \cos \theta - \left(aH_1 \frac{dh_1}{da} + 2H_1h_1 \right) \sin \theta + \\ & + 2 \sqrt{\tau} H_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a \partial \theta} + 2 \sqrt{\tau} h_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

При написании выражений для G_1 и G_2 производные $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{da}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{da}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}\right)$ были заменены их выражениями, которые получены из равенств (81) и (82) путем их дифференцирования по времени t и соответствующих преобразований:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = f^2 \frac{dH_1}{da} H_1 + O(f^3),$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = f^2 \frac{dh_1}{da} H_1 + O(f^3),$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = f^2 H_1^2 + O(f^3),$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \tau + 2f \sqrt{\tau} h_1 + f^2 (h_1^2 + 2\sqrt{\tau} h_2) + O(f^3),$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right) \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = f \sqrt{\tau} H_1 + f^2 (\sqrt{\tau} H_2 + h_1 H_1) + O(f^3).$$

Разложим теперь в ряд по степеням малого параметра f правую часть дифференциального уравнения (77). Для этого представим функцию $F(\varphi, d\varphi/dt)$ в виде разложения в ряд Тейлора относительно точки $(\varphi(a, \theta), d\varphi(a, \theta)/dt)$, т. е.

$$F\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}\right) = F\left(a \cos \theta + f\varphi_1 + f^2\varphi_2 + \dots,\right.$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt}(a \cos \theta + f\varphi_1 + f^2\varphi_2 + \dots) \right) = F\left(a \cos \theta + f\varphi_1 + f^2\varphi_2 + \dots,\right. \\ & \left. -a \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{da}{dt} \cos \theta + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} \frac{da}{dt} + \right. \\ & \left. + f^2 \dots\right) = F(a \cos \theta, -a \sqrt{\tau} \sin \theta) + f \left[\varphi_1 \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)_{f=0} + \right. \\ & \left. + \left(H_1 \cos \theta - ah_1 \sin \theta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \sqrt{\tau} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{f=0} \right] + O(f^2). \end{aligned}$$

Приравнявая правую часть полученного уравнения правой части уравнения (84), получим

$$\begin{aligned} fG_1 + f^2G_2 + \dots = fF(a \cos \theta, -a \sqrt{\tau} \sin \theta) + \\ + f^2 \left[\varphi_1 \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)_{f=0} + \left(H_1 \cos \theta - ah_1 \sin \theta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \sqrt{\tau} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{f=0} \right] + \\ + O(f^3). \end{aligned}$$

Сравнение членов при одинаковых степенях малого

параметра f дает систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tau \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \varphi_1 \right) &= F_0(a, \theta) + 2a \sqrt{\tau} h_1 \cos \theta + 2 \sqrt{\tau} H_1 \sin \theta, \\ \tau \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} + \varphi_2 \right) &= F_1(a, \theta) + 2a \sqrt{\tau} h_2 \cos \theta + 2 \sqrt{\tau} H_2 \sin \theta, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (85)$$

где для краткости введены обозначения $F_0(a, \theta)$ и $F_1(a, \theta)$. Конкретное их выражение, соответствующее нашей задаче, имеет такой вид:

$$F_0 = F(a \cos \theta, -a \sqrt{\tau} \sin \theta) = 2a \sqrt{\tau} \beta \sin \theta - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\psi) a^k \cos^k \theta, \quad (86)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= -2\beta (H_1 \cos \theta - ah_1 \sin \theta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \sqrt{\tau}) - \\ &- \varphi_1 \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k(\psi) a^{k-1} \cos^{k-1} \theta + \left(ah_1^2 - H_1 \frac{dH_1}{da} \right) \cos \theta + \\ &+ \left(\frac{dh_1}{da} a H_1 + 2h_1 H \right) \sin \theta - 2 \sqrt{\tau} h_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + 2 \sqrt{\tau} H_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a \partial \theta}. \end{aligned} \quad (87)$$

Из уравнений (85) можно вывести интересующие нас функции $\varphi_1(a, \theta)$, $\varphi_2(a, \theta)$, $\dots$, $H_1(a)$, $H_2(a)$, $\dots$, $h_1(a)$, $h_2(a)$, $\dots$

Решить уравнение (78) в первом приближении, значит, найти выражения функций $\varphi_1(a, \theta)$, $H_1(a)$ и $h_1(a)$. Для этого представим функции $\varphi_1(a, \theta)$ и $F_0(a, \theta)$ в виде тригонометрического многочлена

$$\varphi_1(a, \theta) = \sum_{m=0}^{\overline{m}} (a_m^{(1)} \cos m\theta + a_m^{(2)} \sin m\theta), \quad (88)$$

коэффициенты $a_m^{(1)}$ и $a_m^{(2)}$ которого определяются равенствами

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(a, \theta_1) d\theta_1, \\ a_m^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(a, \theta_1) \cos m\theta_1 d\theta_1, \\ a_m^{(2)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(a, \theta_1) \sin m\theta_1 d\theta_1. \end{aligned}$$

В разложении (88) должны отсутствовать члены с $\sin \theta$ и $\cos \theta$, т. е. $a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = 0$. На это указывает штрих в сумме (88). Условие отсутствия названных членов означает выбор в качестве величины a полной амплитуды первой основной гармоники колебаний.

Для функции $F_0(a, \theta)$ имеем разложение

$$F_0(a, \theta) = \sum_{m=0}^{\bar{m}} (b_m^{(1)} \cos m\theta + b_m^{(2)} \sin m\theta), \quad (89)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_0^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(a, \theta_1) d\theta_1, \\ b_m^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_0(a, \theta_1) \cos m\theta_1 d\theta_1, \\ b_m^{(2)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_0(a, \theta_1) \sin m\theta_1 d\theta_1. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Подставляя выражения (88) и (89) в первое уравнение (85), получим равенство, связывающее коэффициенты $a_m^{(1)}$ и $a_m^{(2)}$ соответственно с $b_m^{(1)}$ и $b_m^{(2)}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\bar{m}} (1 - m^2) \tau [a_m^{(1)} \cos m\theta + a_m^{(2)} \sin m\theta] - \\ &- \sum_{m=0}^{\bar{m}} (b_m^{(1)} \cos m\theta + b_m^{(2)} \sin m\theta) = 2a \sqrt{\tau} h_1 \cos \theta + \\ &+ 2 \sqrt{\tau} H_1 \sin \theta. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\cos m\theta$ и $\sin m\theta$, получим

$$\begin{aligned} a_m^{(1)} &= \frac{b_m^{(1)}}{\tau(1 - m^2)}, \\ a_m^{(2)} &= \frac{b_m^{(2)}}{\tau(1 - m^2)}, \\ m &= 0, 2, 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

$$a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = 0, \quad (91)$$

$$h_1 = -\frac{b_1^{(1)}}{2a\sqrt{\tau}}, \quad H_1 = -\frac{b_1^{(2)}}{2\sqrt{\tau}}. \quad (92)$$

Подставляя выражение (86) для функции $F_0(a, \theta)$ в равенства (90), найдем

$$\left. \begin{aligned} b_0^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2a\sqrt{\tau} \beta \sin \theta_1 - \sum_{k=0} \alpha_k(\psi) a^k \cos^k \theta_1) d\theta_1 = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0} \alpha_k a^k A_{k,0}, \\ b_m^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2a\sqrt{\tau} \beta \sin \theta_1 - \sum_{k=0} \alpha_k(\psi) a^k \cos^k \theta_1) \times \\ &\quad \times \cos m\theta_1 d\theta_1 = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0} \alpha_k a^k A_{k,m}, \\ b_m^{(2)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2a\sqrt{\tau} \beta \sin \theta_1 - \sum_{k=0} \alpha_k(\psi) a^k \cos^k \theta_1) \times \\ &\quad \times \sin m\theta_1 d\theta_1 = \\ &= \begin{cases} 2a\sqrt{\tau} \beta; m=1, \\ 0; \text{ прочие значения } m, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

где

$$\begin{aligned} A_{k,m} &= \int_0^{2\pi} \cos^k \theta_1 \cos m\theta_1 d\theta_1 = 2[1 + (-1)^{k+m}] \times \\ &\quad \times \begin{cases} s \frac{k!}{(m-k)(m-k+2)\dots(m+k)}; & k < m, \\ \frac{\pi}{2^{k+1}} \binom{k}{i}; & m \leq k, k-m=2i, \\ \frac{k!}{(2i+1)!!(2m+2i+1)!!}; & m < k, k-m=2i+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (94)$$

Здесь

$$s = \begin{cases} 0; & m-k=2i, \\ 1; & m-k=4i+1, \\ -1; & m-k=4i-1. \end{cases}$$

Таблица 14

$n \backslash l$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	2π	0		0	$\frac{3\pi}{4}$	0	$\frac{5\pi}{8}$	0
1	0	π	0	$\frac{3\pi}{4}$	0	$\frac{5\pi}{8}$	0	
2	0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{15\pi}{32}$	0
3	0	0	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{5\pi}{16}$	0	
4	0	0	0	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{3\pi}{16}$	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{\pi}{16}$	0	
6	0	0	0	0	0	0	$\frac{\pi}{32}$	0

Для примера в табл. 14 приведены значения коэффициентов $A_{k,m}$, вычисленные по формуле (94).

Напишем решение дифференциального уравнения (78) в первом приближении,

$$\varphi(t) = a \cos \theta + f\varphi_1(a, \theta), \quad (95)$$

где амплитуда a и фаза колебаний θ определяются путем решения двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{da}{dt} = fH_1(a),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\tau} + fh_1(a).$$

Конкретные выражения функций $H_1(a)$ и $h_1(a)$ можно получить, если обратиться к равенствам (92) — (93). Подставив соответствующие выражения $H_1(a)$ и $h_1(a)$ в

последние два уравнения, будем иметь

$$\frac{da}{dt} = -fa\beta, \quad (96)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\tau} + \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \sum_{k=0} \alpha_k A_{k,1} a^{k-1}. \quad (97)$$

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Члены порядка f в последних двух уравнениях за время t приведут к ошибке порядка $f^2 t$ в самих функциях a и θ . Поэтому в первом приближении в выражении (95) не имеет смысла сохранять член $f\varphi_1(a, \theta)$, а достаточно использовать только первое слагаемое $a \cos \theta$. Выражение же $\varphi_1(a, \theta)$ будет использовано при описании второго приближения в решении исходного дифференциального уравнения.

Проинтегрировав уравнение (96), получим

$$a(t) = a_0 e^{-f\beta t}, \quad (98)$$

где a_0 — начальная амплитуда колебаний. Подставим последнее выражение в дифференциальное уравнение (97):

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\tau} + f \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \sum_{k=1, 3, 5, \dots} \alpha_k A_{k,1} a_0^{k-1} e^{-(k-1)f\beta t}. \quad (99)$$

В сумме отсутствуют члены с четными индексами k , так как равны нулю соответствующие коэффициенты $A_{k,1}$ (см. табл. 14). Проинтегрируем дифференциальное уравнение (99) по времени. Используя для определения постоянной интегрирования начальное условие

$$\theta(t)|_{t=0} = \theta_0,$$

получим следующее выражение для фазы колебаний:

$$\theta(t) - \theta_0 = \sqrt{\tau} t + \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}\beta} \sum_{k=1, 3, 5, \dots} \frac{\alpha_k A_{k,1} a_0^{k-1}}{k-1} \times \\ \times (1 - e^{-(k-1)f\beta t}). \quad (100)$$

Следовательно, решение в первом приближении может

быть записано в виде

$$\varphi(t) = a_0 e^{-f\beta t} \cos \left[\sqrt{\tau} \left(t + \frac{1}{2\pi\beta\tau} \sum_{k=1, 3, 5, \dots} \frac{\alpha_k A_{k, 1} a_0^{k-1}}{k-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - e^{-(k-1)f\beta t}) \right) + \theta_0 \right].$$

Используя первое из равенств (79) и вводя новое обозначение

$$f\beta = \frac{\bar{\beta}}{J} = \beta_1, \quad (101)$$

можно уравнение для $\varphi(t)$ переписать так:

$$\varphi(t) = a_0 e^{-\beta_1 t} \cos \left[\sqrt{\tau} \left(t + \frac{1}{2\pi\beta_1} \left(\frac{f}{\tau} \right) \sum_{k=1, 3, 5, \dots} \frac{\alpha_k A_{k, 1} a_0^{k-1}}{k-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - e^{-(k-1)\beta_1 t}) \right) + \theta_0 \right],$$

которое представляет решение дифференциального уравнения (78) в первом приближении. В решении учитывается изменение амплитуды и фазы колебаний в течение времени t .

§ 30. Решение дифференциального уравнения крутильных колебаний во втором приближении

Решение во втором приближении ищется в виде уравнения (95)

$$\varphi(a, \theta) = a \cos \theta + f\varphi_1(a, \theta),$$

в котором амплитуда a и фаза θ определяются из дифференциальных уравнений, содержащих уже члены порядка малости f^2 :

$$\frac{da}{dt} = fH_1(a) + f^2H_2(a), \quad (102)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\tau} + fh_1(a) + f^2h_2(a). \quad (103)$$

Выражения коэффициентов разложения функции $\varphi_1(a, \theta)$ в ряд Фурье нами были найдены в предыдущем параграфе. Поэтому теперь можно записать разложение функции

$\varphi_1(a, \theta)$ в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(a, \theta) = & -\frac{1}{2\pi\tau} \sum_{k=0} \alpha_k a^k A_{k,0} - \\ & -\frac{1}{\pi\tau} \sum_{m=2} \left(\frac{1}{1-m^2} \sum_{k=0} \alpha_k a^k A_{k,m} \right) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (104)$$

Здесь a и θ являются функциями времени; явное их выражение должно быть определено путем решения дифференциальных уравнений (102) и (103). Для вывода необходимых при этом функций H_2 и h_2 умножим последовательно обе части второго равенства (85) на $\cos \theta d\theta$ и $\sin \theta d\theta$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tau \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} + \varphi_2 \right) \cos \theta d\theta = & \int_0^{2\pi} F_1(a, \theta) \cos \theta d\theta + \\ & + 2a \sqrt{\tau} h_2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos \theta d\theta + 2 \sqrt{\tau} H_2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta, \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tau \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} + \varphi_2 \right) \sin \theta d\theta = & \int_0^{2\pi} F_1(a, \theta) \sin \theta d\theta + \\ & + 2a \sqrt{\tau} h_2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta + 2 \sqrt{\tau} H_2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (106)$$

Так как функция $\varphi_2(a, \theta)$, представленная в виде ряда Фурье, так же как и $\varphi_1(a, \theta)$ (88), не должна содержать членов с $\sin \theta$ и $\cos \theta$, то левые части уравнений (105) и (106) равны нулю. В правые части этих уравнений вместо функции $F_1(a, \theta)$ подставляем ее выражение (87). Поскольку $F_1(a, \theta)$ содержит $\varphi_1(a, \theta)$, то при интегрировании используется уравнение (88). В результате преобразования уравнений (105) и (106) получим

$$0 = \pi a (\beta^2 + h_1^2) - \sum'_{m_1=0} \sum_{k=1} k \alpha_k a^{k-1} a_{m_1}^{(1)} A_{k, m_1} + 2\pi a \sqrt{\tau} h_2, \quad (107)$$

$$0 = -\pi \beta a^2 \frac{dh_1}{da} + 2\pi \sqrt{\tau} H_2. \quad (108)$$

При выводе формул (108), кроме ранее написанных соотношений (94), использовались следующие:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos m_1\theta d\theta &= \begin{cases} 2\pi; m = m_1 = 0, \\ \pi; m = m_1 \neq 0, \\ 0; m \neq m_1, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin m_1\theta d\theta &= \begin{cases} \pi; m = m_1 = 0, \\ 0; m \neq m_1, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos m_1\theta dm &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Находя h_2 и H_2 из уравнений (107) и (108), подставим их выражения в дифференциальные уравнения (102) и (103), определяющие амплитуду и фазу колебаний во втором приближении:

$$\frac{da}{dt} = -a\beta_1 + \frac{\beta_1}{4\pi} \left(\frac{f}{\tau} \right) \sum_{k=2} (k-1) \alpha_k A_{k,1} a^k, \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\tau} - \frac{\beta_1^2}{2\sqrt{\tau}} + \frac{f}{2\pi\sqrt{\tau}} \sum_{k=1} \alpha_k A_{k,1} a^{k-1} - \\ &\quad - \frac{f^2}{8\pi^2\tau^3} \left(\sum_{k=1} \alpha_k A_{k,1} a^{k-1} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{f^2}{2\pi\sqrt{\tau}} \sum'_{m=0} \sum_{k=1} k \alpha_k a_m^{(1)} A_{k,m} a^{k-2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Решение этих уравнений будем искать, ограничившись конечным числом членов сумм в выражениях (110) и (111). Предположим, что в разложении момента сил притяжения сохранены члены с α_1 , α_3 и α_5 , т. е. члены с первой, третьей и пятой степенями угла φ . Кроме того, будем считать, что коэффициент α_1 объединен с τ :

$$\tau + f\alpha_1 = \tau_1.$$

Для такого упрощенного, но вполне достаточного по точности случая уравнение (110) приобретает вид

$$\frac{da}{dt} = -a\beta_1 + \frac{\beta_1}{8} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) (3\alpha_3 a^3 + 5\alpha_5 a^5).$$

Это — дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными; преобразуем его к виду

$$\frac{da}{a \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) (3\alpha_3 a^2 + 5\alpha_5 a^4) \right]} = -\beta_1 dt.$$

Разлагая знаменатель левой части в ряд и удерживая члены порядка a^4 , проинтегрируем полученное уравнение

$$\ln a + \frac{3}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3 a^2 + \frac{5}{32} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_5 a^4 + \frac{9}{256} \left(\frac{f}{\tau_1} \right)^2 \alpha_3^2 a^4 = -\beta_1 t + \ln C_1, \quad (112)$$

где C_1 — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия:

$$a(t)|_{t=0} = a_0.$$

Для того чтобы разрешить уравнение (112) относительно a , сначала положим

$$a \approx a_0 e^{-\beta_1 t},$$

и это выражение a подставим во все члены уравнения (112), кроме основного $\ln a$. После этого можно написать

$$a(t) = C_1 e^{-\beta_1 t} \left[e^{-\frac{3}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3 a_0^2 e^{-2\beta_1 t} - \frac{1}{32} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) a_0^4 \left(5\alpha_5 + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3^2 \right) e^{-4\beta_1 t}} \right].$$

Экспоненциальную функцию, записанную в квадратных скобках, разлагаем в ряд по степеням ее показателя, а удерживая только первые члены разложения, приближенно получим

$$a(t) = C_1 e^{-\beta_1 t} \left[1 - \frac{3}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3 a_0^2 e^{-2\beta_1 t} - \frac{1}{32} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(5\alpha_5 + \frac{9}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3^2 \right) a_0^4 e^{-4\beta_1 t} \right].$$

Находя постоянную интегрирования C_1 из начального условия, будем иметь следующее выражение для амплитуды колебаний во втором приближении:

$$a(t) = \bar{a}_0 e^{-\beta_1 t} \left[1 - \frac{3}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3 a_0^2 e^{-2\beta_1 t} - \frac{1}{32} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(5\alpha_5 + \frac{9}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3^2 \right) a_0^4 e^{-4\beta_1 t} \right], \quad (113)$$

где

$$\bar{a}_0 = \frac{a_0}{1 - \frac{3}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3 a_0^2 - \frac{1}{32} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \left(5\alpha_5 + \frac{9}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3^2 \right) a_0^4}.$$

Теперь необходимо выражение (113) подставить в правую часть дифференциального уравнения (111). В уравнении (111) сохраним тоже только члены с α_1 , α_3 и α_5 :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = & \sqrt{\tau_1} - \frac{\beta_1^2}{2\sqrt{\tau_1}} + \frac{f}{\sqrt{\tau_1}} \left[\frac{3}{8} \alpha_3 a^2 + \frac{5}{16} \alpha_5 a^4 \right] - \frac{f^2}{8\tau_1^{3/2}} \left[\frac{3}{4} \alpha_3 a^2 + \right. \\ & \left. + \frac{5}{8} \alpha_5 a^4 \right]^2 + \frac{f^2}{2\sqrt{\tau_1}} \left[\frac{3}{4} \alpha_3 a_3^{(1)} a + \frac{25}{16} \alpha_5 a_3^{(1)} a^3 + \frac{5}{16} \alpha_5 a_5^{(1)} a^3 \right]. \end{aligned} \quad (114)$$

В соответствии с равенствами (91) и (93):

$$\begin{aligned} a_3^{(1)} &= \frac{1}{32\tau_1} (\alpha_3 a^3 + \frac{5}{4} \alpha_5 a^5), \\ a_5^{(1)} &= \frac{1}{384\tau_1} \alpha_5 a^5. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть уравнения (114) выражения $a_3^{(1)}$ и $a_5^{(1)}$ и удерживая члены порядка a_0^4 , получим следующее выражение возмущенной частоты колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = & \sqrt{\tau_1} \left\{ 1 - \frac{\beta_1^2}{2\tau_1} + \frac{3}{8} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3 a_0^2 e^{-2\beta_1 t} + \frac{9}{64} \left(\frac{f}{\tau_1} \right)^2 \alpha_3^2 a_0^4 e^{-2\beta_1 t} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \left(5\alpha_5 - \frac{51}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3^2 \right) a_0^4 e^{-4\beta_1 t} \right\}. \end{aligned} \quad (115)$$

Проинтегрируем уравнение (115) по времени t и оставим в результате члены порядка a_0^4 . Тогда выражение для фазы колебания приобретает такой вид:

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \sqrt{\tau_1} \left\{ \left(1 - \frac{\beta_1^2}{2\tau_1} \right) t - \frac{3}{16\beta_1} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3 a_0^2 e^{-2\beta_1 t} - \right. \\ & - \frac{9}{128\beta_1} \left(\frac{f}{\tau_1} \right)^2 \alpha_3^2 a_0^4 e^{-2\beta_1 t} - \\ & \left. - \frac{1}{64\beta_1} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) a_0^4 \left(5\alpha_5 - \frac{51}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3^2 \right) e^{-4\beta_1 t} \right\} + C_2. \end{aligned} \quad (116)$$

Постоянная интегрирования C_2 определяется из начального условия

$$\theta(t)|_{t=0} = \theta_0.$$

Находя C_2 и подставляя ее выражение в (116), будем иметь

$$\begin{aligned} \theta(t) - \theta_0 = \sqrt{\tau_1} \left\{ \left(1 - \frac{\beta_1^2}{\tau_1} \right) t + \frac{3}{16\beta_1} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3 a_0^2 (1 - e^{-2\beta_1 t}) + \right. \\ \left. + \frac{9}{128\beta_1} \left(\frac{f}{\tau_1} \right)^2 \alpha_3^2 a_0^4 (1 - e^{-2\beta_1 t}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{64\beta_1} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \left(5\alpha_5 - \frac{51}{16} \left(\frac{f}{\tau_1} \right) \alpha_3^2 \right) a_0^4 (1 - e^{-4\beta_1 t}) \right\}. \quad (117) \end{aligned}$$

Таким образом, можно написать решение дифференциального уравнения (78) во втором приближении, амплитуда которого определяется равенством (113), а фаза — выражением (117).

Амплитуда и фаза являются функциями времени t . В силу того, что колебания описывались нелинейным уравнением, частота колебаний оказалась зависящей от их амплитуды и времени.

§ 31. Применение описанной теории к задаче определения постоянной тяготения

Угол отклонения φ крутильной системы зависит не только от времени, но и от параметров крутильной системы и притягивающих масс (посредством коэффициентов α_k), коэффициента β_1 , характеризующего вязкое сопротивление движению крутильной системы. Кроме того, величина угла φ зависит от постоянной тяготения f и упругой постоянной нити τ . Последняя может быть рассчитана по заданному модулю сдвига материала, из которого изготовлена нить, по ее длине и диаметру. Однако из-за неточности этих данных вычисленные значения τ являются ненадежными. Поэтому в экспериментах эта величина находится одновременно с определением значения постоянной тяготения. От этих двух постоянных зависит и амплитуда и частота колебаний. Поэтому в принципе возможно их определение по изменению как амплитуды, так и частоты.

Амплитуда a зависит от τ и f только во втором приближении. Основное ее изменение (113) пропорционально начальной амплитуде a_0 , умноженной на экспоненциальную функцию, показателем которой является $-\beta_1 t$. Кроме основного, имеется незначительное изменение, зависящее от членов со степенями a_0 . Только эти члены имеют множителем отношение f/τ_1 . Поскольку величина амплитуды a_0 колебаний составляет доли радиана, то степени a_0 быстро убывают и поправка к основной части амплитуды представляет малую величину. Уловить это изменение за счет изменения f/τ_1 с достаточной точностью затруднительно. Поэтому амплитудный метод определения постоянных f и τ в рассматриваемом случае нецелесообразен.

Несравненно предпочтительнее постоянную тяготения f определять по частоте колебаний, которая зависит от постоянной τ и постоянной тяготения f уже в первом приближении. Нами было найдено выражение для частоты $d\theta/dt$ (115) с точностью до a_0^4 . Хотя частота $d\theta/dt$ тоже зависит от амплитуды a_0 , но, как можно видеть по равенству (115), отношение f/τ_1 входит множителем при второй, четвертой и т. д. степенях амплитуды a_0 . Так как $\tau_1 = \tau + f\alpha_1$, то очевидно, что отношение f/τ будет входить и с нулевой степенью амплитуды a_0 и независимо от времени t .

Значение коэффициента β_1 более надежно может быть определено по изменению амплитуды колебаний или средней линии записи $\varphi(t)$. Кривая $\varphi(t)$ состоит из суммы слагаемых, уменьшающихся с различными степенями $e^{-\beta_1 t}$.

Для определения показателя β_1 необходимо представить осевую линию записи колебаний $\varphi(t)$ в виде многочлена по степеням $e^{-\beta_1 t}$ с неизвестными коэффициентами β_1 в показателях степени и неизвестными коэффициентами n_i многочлена

$$\varphi(t) = n_1 e^{-\beta_1 t} + n_2 e^{-2\beta_1 t} + \dots + n_k e^{-k\beta_1 t} + n_0.$$

Не останавливаясь на технике определения искомых неизвестных n_i и β_1 , отметим только, что этот процесс является крайне деликатным, ввиду исключительной чувствительности показательной функции к ошибкам исходных данных.

Коэффициент при f/τ , как показывает равенство (115), представляет собой сумму, каждое слагаемое которой

зависит от различных степеней начальной амплитуды a_0 , коэффициентов α_k , зависящих от параметров прибора: массы и размеров коромысла крутильной системы и величины притягивающих масс, а также расстояний их от оси колебаний. Все эти параметры являются заранее точно известными величинами. Для определения из опыта частоты колебаний $d\theta/dt$ производится точная регистрация фазы колебаний в определенные моменты времени. Определение $d\theta/dt$ — сложная и большая проблема. Сейчас же мы предположим, что так или иначе из опыта определена частота $d\theta/dt$, т. е. известна левая часть уравнений (115). Неизвестными считаются τ и f . Перепишем уравнение (115) в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\tau} \left[1 - \frac{\beta_1^2}{2\tau} + \left(\frac{f}{\tau} \right) L^{(1)}(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \beta_1, a_0, t) + \left(\frac{f}{\tau} \right)^2 L^{(2)}(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \beta_1, a_0, t) \right], \quad (118)$$

где коэффициенты при степенях f/τ обозначены соответственно через $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$. Это — известные величины, так как при проведении эксперимента величина массы крутильной системы, ее размеры и расстояние от притягивающих масс, а также размеры и массы последних считаются заданными. Амплитуда же колебаний a_0 и коэффициент $\beta_1(t)$ определяются в процессе опыта. Учитывая малость членов с $(f/\tau)^2$ и $\beta_1^2/2\tau$, можно для их вычисления принять приближенные значения f и τ . Тогда неизвестные $\sqrt{\tau}$ и f могут быть определены из двух уравнений вида (118). Для этого определяются частоты колебаний крутильной системы $d\theta/dt$, соответствующие двум различным положениям притягивающих масс. Наиболее существенно сказывается на изменении частоты $d\theta/dt$ изменение положения и размеров притягивающих масс. Обычно в проводившихся ранее опытах изменялся только один параметр — положение этих масс. Различием амплитуды a_0 колебаний при двух положениях притягивающих масс и небольшим изменением частоты $d\theta/dt$, со временем пренебрегали.

Если соответствие двум различным положениям притягивающих масс, амплитудам колебаний a_0 и моментам

времени t отметить индексами I и II, а сумму небольших поправок за счет членов с β_1^2 и $(f/\tau)^2$ обозначить через l , то для определения $\sqrt{\tau}$ и f/τ получим два следующих уравнения:

$$\sqrt{\tau} = \frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_I L_{II}^{(1)} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{II} L_I^{(1)}}{L_{II}^{(1)}(1+l_I) - L_I^{(1)}(1+l_{II})},$$

$$\frac{f}{\tau} = \frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_I(1+l_{II}) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{II}(1+l_I)}{L_{II}^{(1)}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_I - L_I^{(1)}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{II}}.$$

С их помощью можно найти уравнение для определения интересующей нас постоянной тяготения f :

$$f = \frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_I^2 L_{II}^{(1)}(1+l_{II}) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{II}^2 L_I^{(1)}(1+l_I)}{L_{II}^{(1)}(1+l_I) - L_I^{(1)}(1+l_{II})} -$$

$$- \frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{II} [L_I^{(1)}(1+l_{II}) + L_{II}^{(1)}(1+l_I)]}{L_{II}^{(1)}(1+l_I) - L_I^{(1)}(1+l_{II})}.$$

Решение во втором приближении можно получить, используя для определения поправки l найденные значения f и τ в первом приближении.

При определении постоянной тяготения важно такое расположение притягивающих масс, чтобы они оказывали максимальный гравитационный эффект на крутильную систему.

Теперь рассмотрим вопрос о чувствительности крутильной системы к гравитационному влиянию притягивающих масс. Чувствительность характеризуется производной угла закручивания крутильной системы по изменению момента сил притяжения. Мы здесь говорим о механической чувствительности крутильной системы, не рассматривая чувствительности регистрирующих устройств (оптического, фотоэлектрического и пр.), применяемых при определении постоянной тяготения. Общая чувствительность складывается из совокупности чувствительностей механической и регистрации. Трудность состоит в

повышении именно механической чувствительности прибора, поэтому ею главным образом и определяется общая чувствительность.

Уравнение статического равновесия крутильной системы под действием момента сил притяжения, момента упругих сил закрученной нити записывается так:

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi - \psi) + \tau(\varphi - \varphi_0) = 0.$$

Производная угла закручивания φ по моменту сил притяжения равна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{M}_{\text{пр}}} = -\frac{1}{\tau}.$$

Из дифференциального уравнения крутильных колебаний можно найти период T колебаний. Пренебрегая влиянием момента сил притяжения на период крутильных колебаний (величиной, малой по сравнению с моментом упругой силы), выражение для упругой чувствительности крутильной системы можно переписать так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{M}_{\text{пр}}} = -\frac{T^2}{4\pi^2 J}.$$

Это равенство показывает, что чувствительность возрастает прямо пропорционально квадрату периода T крутильных колебаний и обратно пропорционально моменту инерции J крутильной системы. Таким образом, увеличить угловую чувствительность $\partial\varphi/\partial\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ крутильной системы можно путем уменьшения угловой постоянной τ , т. е. увеличением длины нити крутильной системы, уменьшением ее диаметра и уменьшением модуля упругости материала, из которого изготавливается нить. Однако эти возможности, очевидно, ограничены.

Заключение

Выводить среднее значение гравитационной постоянной f из совокупности результатов различных опытов, хотя бы даже с учетом весов, на наш взгляд представляется неправильным. Оценка точности, указанная в табл. 9, 10, 11, является мало достоверной, так как в одних опытах она выведена при большом разнообразии параметров прибора (притягивающих масс, крутильной системы и т. д.), а в других — при малом. Кроме того, средний результат в различных опытах выводился на основании различного числа измерений. Кажется разумнее всего при выводе среднего значения f ориентироваться на результаты наиболее совершенных экспериментов. Анализ показывает, что таковыми являются опыты Брауна, Хейла и Хейла с Хржановским. Это подтверждают и формальные показатели точности опытов — средние квадратические ошибки. Однако расхождение между результатами Брауна и двух других опытов, превышающее средние квадратические ошибки каждого из результатов, ставит новые трудности в выборе окончательного значения постоянной тяготения. Поэтому вплоть до новых измерений f лучше всего сейчас основываться на последних результатах Хейла и Хржановского 1942 г.:

$$f = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2.$$

В отличие от оценки самих авторов, мы приводим среднюю квадратическую ошибку среднего результата.

Анализ определений кавендиша гравитационной постоянной показывает, что точность ее измерений остается несравненно ниже, чем многих других фундаментальных констант физики, астрономии и геофизики. В то же время необходимость в более точном знании ее числового

значения и непосредственно связанных с ней массы и средней плотности Земли в современной науке все возрастает.

В связи с попытками создания единой теории поля делаются теоретические построения по обнаружению аналитических связей между различными постоянными физики, и в том числе с постоянной тяготения. Справедливость теоретически устанавливаемых связей может быть проверена при достаточно точном знании постоянной тяготения.

Определение последней с достаточно большим числом знаков открывает принципиально новые возможности в метрологии, при установлении системы единиц измерения массы, длины и времени. В частности, мыслимо введение единицы времени, выводимой на основе фундаментального закона природы — закона тяготения Ньютона (см. § 2).

Геофизическое изучение нашей планеты с помощью измерения пространственных и временных вариаций гравитационного поля тоже требует повышения точности определения кавендиша гравитационной постоянной, массы и средней плотности Земли. Эта проблема важна и для небесно-механических задач, где возникает необходимость учета гравитационного взаимодействия искусственных небесных тел, значение которых с каждым днем возрастает.

Нами для примера названа только часть проблем, связанных с необходимостью уточнения постоянной тяготения. Потребность в новых экспериментах по определению постоянной тяготения сейчас назрела, поэтому после длительного затишья вновь проявился интерес к этой задаче.

Со времени последних определений постоянной тяготения прошло около 30 лет. Достигнут заметный прогресс в метрологии и технике измерений массы, длины и времени. Особенно большие успехи имеются в технике измерения времени, что весьма существенно для динамических методов измерения постоянной тяготения, которые на наш взгляд являются наиболее перспективными.

Новое повышение точности вывода f немыслимо без уточнения теории прибора. В методе крутильных весов необходимо использовать теорию нелинейных колебаний. Во времена эксперимента Хейла и Хржановского такая теория только начинала разрабатываться.

Нелинейность колебаний возникает прежде всего за счет нелинейности момента сил взаимного притяжения взаимодействующих масс, который для решения дифференциального уравнения крутильных колебаний представляется в виде разложения в ряд по степеням угла отклонения крутильной системы от равновесного положения. Важное значение приобретает вопрос учета плотностной неоднородности притягивающих масс, разработка методики ее определения.

При постановке задачи определения постоянной тяготения с относительной точностью 10^{-5} — 10^{-6} число эффектов, подлежащих учету, несравненно возрастает. Поэтому необходим более тщательный теоретический анализ тонких эффектов, которыми пренебрегали в прежних экспериментах. Мы имеем в виду неоднородности гравитационного поля, обусловленные притяжением столбов, стен здания и т. д. Это влияние проявляется только при рассмотрении нелинейной теории. Повышение точности ставит вопрос об учете нелинейности упругих сил нити крутильной системы, сил сопротивления остаточного воздуха, и сил внутреннего трения в нити и т. д. Возникает также вопрос об учете влияния колебаний крутильной системы по другим степеням свободы, отличным от основных крутильных. Эксперимент в земных условиях неизбежно подвержен влиянию микросейсм и вибраций, которые искажают результат. Эти помехи, которые полностью исключить нельзя, надо учитывать с помощью специальной теории.

За последнее время существенно увеличились наши знания о гравитационном поле Земли, уточнены ее размеры. Относительная точность определения геоцентрической гравитационной постоянной составляет несколько единиц 10^{-6} . Повышение точности определения постоянной тяготения приведет к более точному знанию массы Земли и ее средней плотности.

Литература

- [1] А г а л е ц к и й П. И., Е г о р о в К. Н. и М а р ц и н я к А. И., Абсолютные определения ускорения силы тяжести в пункте ВНИИМ, Труды ВНИИМ 32 (92), 1958.
- [2] Б о г о л ю б о в Н. Н. и М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.
- [3] Б р а г и н с к и й В. Б., Р у д е н к о В. Н. и Р у н м а н Г. И., Экспериментальные исследования влияния промежуточной среды на гравитационное взаимодействие, ЖЭТФ 43, 1962, 51—58.
- [4] Б р а г и н с к и й В. Б. и М а р т ы н о в В. К., Исследование влияния промежуточного тела на гравитационное взаимодействие. В кн.: Проблемы гравитации, Тбилиси, 1965, 263.
- [5] Б р а г и н с к и й В. Б., С л а б к и й Л. И. и М а р т ы н о в В. К., Верхняя граница возможных спиновых гравитационных эффектов, Вестн. МГУ, Астр., физ., № 2, 1967, 122—124.
- [6] Б р и д ж м э н, Анализ размерностей, Л.— М., 1934.
- [7] Г е р ш у н А., Об одном методе для определения средней плотности Земли и гравитационной постоянной, Изв. Русск. астрон. о-ва, 8, № 4—6, 1900, 15—32.
- [8] Г р у ш и н с к и й Н. П., Введение в гравиметрию и гравиметрическую разведку, изд. МГУ, 1961.
- [9] Г р у ш и н с к и й Н. П. и С а г и т о в М. У., О наблюдении силы тяжести во время полного солнечного затмения, Вестн. МГУ, Астр., физ., № 5, 1962, 46—53.
- [10] Д и к е Р., Эксперимент Этвеша, УФН 79, 1963, 333—343.
- [11] Д а й к Р. Х., Природа гравитации. В кн.: Наука в космосе, «Наука», 1964, 113—139.
- [12] Д о б р о х о т о в Ю. С., Гравиметрические наблюдения в Киве во время солнечного затмения 15 февраля 1961 г. В кн.: Изучение земных приливов, «Наука», 1964, 31—44.
- [13] З е л ь д о в и ч Я. Б., Неизбежность общей теории относительности. В кн.: Проблемы гравитации, Тбилиси, 1965, 13.
- [14] И в а н е н к о Д. Д., Основные проблемы гравитации. В кн.: Новейшие проблемы гравитации, ИЛ, 1961, 5—64.
- [15] К а г а л ь н и к о в а И. И., История развития нерелятивистских представлений о природе гравитации, Учен. зап. Ярославск. пед. ин-та 56, 1963, 87—188.

- [16] Кагальникова И. И. и Радзиевский В. В., Определение верхнего предела коэффициента поглощения гравитации по явлению морских приливов. В кн.: Проблемы гравитации, Тбилиси, 1965, 260—262.
- [17] Крылов А. Н., Ньютон и его значение в мировой науке. В кн.: Крылов А. Н., Собрание трудов 1, ч. 2, 1951, 239.
- [18] Кузиков В. А. и Сагитов М. У., Развитие идей Этвеша в СССР в области гравиметрии, *Ann. Univers. Sci. Budapest, sec. geol.* 7, 1963 (1964), 53—58.
- [19] Куликов К. А., Система астрономических постоянных, *Астрон. журн.* 42, 1965, 666—668.
- [20] Ньютон И., Математические начала натуральной философии, перев. А. Н. Крылова (Крылов А. Н., Собрание трудов 7, 1936).
- [21] Орлов А. Я., Определение массы системы Земля — Луна по геодезическим измерениям и наблюдениям, *Труды Астр. общ. Юрьевского университета* 21, ч. 3, 1910, 27—34.
- [22] Сагитов М. У., К теории одного способа определения постоянной тяготения. В кн.: Проблемы гравитации, Тбилиси, 1965, 265.
- [23] Станюкович К. П., К вопросу о возможности изменения гравитационной постоянной, *ДАН СССР* 147, 1962, 1348—1351.
- [24] Уиллер Д. А., Гравитация, нейтрино и Вселенная, *ИЛ*, 1962, 193.
- [25] Airy G. B., Account of pendulum experiments undertaken in the Harton Colliery for the purpose of determining the mean density of the Earth, *Philos. Trans.* 146, pt. I, 1856, 297—342.
- [26] Airy G. B., Supplements to the «Account of pendulum experiments undertaken in the Harton Colliery» being an account of experiments undertaken to determine the correction for the temperature of the pendulum, *Philos. Trans.* 146, pt. I, 1856, 343—355.
- [27] Anderle R. J. and Osterwinter A., Preliminary potential for the Earth from Doppler observations on satellites. (Pres. at the 4th COSPAR Space sc. Symposium, Warszawa, 1963).
- [28] Austin L. and Thwing C. B., An experimental research on gravitational permeability, *Phys. Rev.* 5, 1897, 294—300.
- [29] Bailey F., An account of some experiments with the torsion-rod for determining of the mean density of the Earth, *Mem. Roy. Astr. Soc.* 14, 1843, 1—120; сокр. излож.: London, Edinburgh and Dublin, *Phil. Mag. and Journ. of Sci.* 21, 1842, 111—121.
- [30] Berget A., Détermination expérimentale de la constante de l'attraction universelle, ainsi que de la masse et de la densité de la Terre, *C. R.* 116, 1893, 1501—1503.
- [31] Bouguer P., La figure de la Terre, déterminée par les observations de M. M. Bouguer et de La Condamine de l'Académie R. des Sciences, envoyés par ordre du roi au Pérou pour observer aux environs de l'équateur, Paris, 1749.

- [32] B o y s C. V., On the Cavendish experiment, Proc. Roy. Soc. of London 46, 1889, 253—268.
- [33] B o y s C. V., On the Newtonian constant of gravitation, Proc. Roy. Soc. of London 56, 1894, 131—132.
- [34] B o y s C. V., On the Newtonian constant of gravitation, Philos. Trans. (A) 186, pt. 1, 1895.
- [35] B r a u n C., Die Gravitations-Constante, die Masse und mittlere Dichte der Erde, Denkschr. Kais. Akad. Wissensch. (Wien). Math.-naturwiss. Klasse 64, 1897, 187—258.
- [36] B r a u n C., Die Gravitations-Constante, die Masse und mittlere Dichte der Erde nach einer neuen experimentellen Bestimmung, Naturwissensch. Rundschau 12, № 22, 1897, 273.
- [37] B u r g e s s G. K., Méthode pour déterminer la constante newtonienne, C. R. 129, 1899, 407—409.
- [38] B u r g e s s G. K., A new form of Cavendish balance, Phys. Rev. 14, № 4, 1902, 247—250.
- [39] C a p u t o M., Gravity in space and the dimensions and mass of the Earth, Journ. G. R. 68, N 15, 1965, 4595—4600.
- [40] C a r l i n i F., Osservazioni della lunghezza del pendolo semplice fatte all'altezza di mille tese sul livello del mare, Effem. astr., Milano, 1824, 28—40.
- [41] C a r l i n i F. and S a b i n e E., An account of Carlini's pendulum experiments on Mont Cenis, Quart. Journ. of Science 2, 1827, 153—159.
- [42] C a v e n d i s h H., On the density of the Earth, Philos. Trans. 88, 1798, 469—526; Journ. de l'École Polytechnique 17, 1815, 263—320.
- [43] C o o k A. H., Geodetic constants and the motion of Moon, Bull. astr. 25, 1965, 33—65 (21 IAU — Symp.).
- [44] C o r n u A. et B a i l l e J., Détermination nouvelle de la constante de l'attraction et de la densité moyenne de la Terre, C. R. 76, 1873, 954—958.
- [45] C o r n u A. et B a i l l e J., Étude de la résistance de l'air dans la balance de torsion, C. R. 86, 1878, 574—574.
- [46] C o r n u A. et B a i l l e J., Sur la mesure de la densité de la Terre, C. R. 86, 1878, 699—702.
- [47] C o r n u A. et B a i l l e J., Influence des termes proportionnels au carré des écarts, dans le mouvement oscillatoire de la balance de torsion, C. R. 86, 1878, 1001—1004.
- [48] D i c k e R., Gravitation without principle of equivalence, Rev. Mod. Phys. 29, 1957, 363—376.
- [49] D i r a c P. A. M., A new basis for cosmology, Proc. Roy. Soc. (A) 165, 1938, 199—208.
- [50] E ö t v ö s R., Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus, Annalen d. Phys. und Chem., N. F. 59, 1896, 354—400; E ö t v ö s R., Gesammelte Arbeiten, Budapest, 1953.
- [51] E ö t v ö s R., P e k a r d. und F e k e t e E., Beiträge zur Gesetze der Proportionalität von Tragheit und Gravität, Annalen der Phys. 68, 1922, 1—56.
- [52] F i s c h e r I., Parallax of the Moon in terms of a world geodetic system, Astr. Journ. 67, 1962, 373—378.

- [53] G é r s c h u n A., Méthode pour déterminer la densité moyenne de la Terre et la constante gravitationnelle, C. R. 129, 1899, 1013—1015.
- [54] G i u l i o C. I., Sur la détermination de la densité moyenne de la Terre déduite de l'observation du pendule faite à l'hospice du Mont Cenis, par M. Carlini en sept. 1821, Mem. Acad. Sci. Torino 2, 1840, 379—385.
- [55] H e a r n G. W., On the causes of the discrepancies observed by Mr. Baily with the Cavendish apparatus for determining the mean density of the Earth, Trans. of the Roy. Philos. Soc. of Edinburgh 65 (137), 1847, 217—229.
- [56] H e y l P. R., A determination of the constant of gravitation, Journ. of Res. Nat. Bureau of Standards USA 5, 1930, 1243—1290.
- [57] H e y l P. R., What is gravitation?, Sci. Monthly 47, 1938, 114—123.
- [58] H e y l P. R., and C h r z a n o w s k i P., A new determination of the constant of gravitation, Journ. of Res. Nat. Bureau of Standards USA 29, N 1, 1942, 1—31.
- [59] H i c k s W. M., On the irregularities in the values of the mean density of the Earth, as determined by Baily, Proc. Cambridge Philos. Soc. 5, pt. 2, 1886, 156—161.
- [60] H u t t o n Ch., An account of the calculations made from the survey and measures taken at Schihallien, in order to ascertain the mean density of the Earth, Philos. Trans. 68, 1778, 689—788.
- [61] H u t t o n Ch., On the mean density of the Earth, Philos. Trans. 111, 1821, 276—292.
- [62] J a m e s H., On the figure, dimensions, and mean specific gravity of the Earth as derived from the Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland. Philos. Trans. 146, pt. 2, 1856, 607—626. Резюме: Proc. Roy. Soc. of London 8, 1857, 111.
- [63] J a m e s H. and C l a r k e R., On the deflection of the plumb-line at Arthur's Seat, and on the mean specific Gravity of the Earth, Philos. Trans. 146, pt. 2, 1856, 591—606.
- [64] J o l l y Ph., Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation, Annalen d. Phys. und Chem. 5, 1878, 112—134; Abhandl. math.-phys. Classe der Bayerischen Akad. der Wissensch. 13, 1878.
- [65] J o l l y Ph., Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation, Annalen d. Phys. und Chem. 14, 1881, 331—355; Abhandl. math.-phys. Classe der Bayerischen Akad. der Wissensch. 14, 1881.
- [66] J o r d a n P., Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie, Braunschweig, 1952.
- [67] K a u l a W. M., A review of geodetic parameters, Bull. astr. 25, 1965, 21—31 (21 IAU — Symp.).
- [68] K ö n i g A. und R i c h a r z F., Eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitations-Constante, Sitzungsber. der Kgl. Preussischen Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1884, 1203—1205.

- [69] K ö n i g A. und R i c h a r z F., Remarks on our method of determining the mean density of the Earth, *Nature* 31, 1885, 484
- [70] L à s k a W., Über einer neuen Apparat zur Bestimmung der Erddichte, *Zschr. f. Instrumentenkunde* 9, 1889, 354.
- [71] K u n z J., Resonanzmethoden für die Bestimmung der Gravitationskonstanten, *Phys. Zeitschr.* 31, 1930, 764—768.
- [72] L i p m a n n G., Sur la mesure absolue du temps, deduite des loi de l'attraction universelle, *C. R.* 128, 1899, 1137—1142.
- [73] M a c k e n z i e A. S., The attraction of cristalline and isotropic masses of small distances, *Phys. Rev.* 2, 1895, 5—14.
- [74] M a i o r a n a Q., Absorption de la gravitation par la matière, *J. de phys. et radium* 1, 1930, 314—324.
- [75] M a y e r A. M., Methods of determining the density of the Earth, *Nature* 31, 1885, 408.
- [76] M e n d e n h a l l T. G., Determination of the acceleration due to the force of gravity at Tokyo, Japan, *Americ. J. of Science* 20, 1880, 124—132.
- [77] M e n d e n h a l l T. C., On a determination of the force of gravity at the Summit of Fujiyama, Japan, *Americ. J. of Science* 21, 1881, 99—103.
- [78] O k u d a T., Gravimetry. В кн.: Japanese Contribution to the JGJ 1957/8, vol. 2., Tokyo, 1960, 167—176.
- [79] P l a y f a i r J., Account of a Lithological Survey of Schehallien, made in order to determine the specific gravity of the rocks composing that mountain, *Philos. Trans.* 101, pt. II, 1811, 347—378.
- [80] P o y n t i n g J. H., On the method of using the balance with great delicacy and on its employment to determine the mean density, *Proc. Roy. Soc. of London* 28, 1878, 2—35.
- [81] P o y n t i n g J. H., On a determination of the mean density the Earth and the gravitation constant by means of the common balance, *Philos. Trans. (A)* 182, 1891, 565—656; P o y n t i n g J. H., The mean density of the Earth, London, Griffin, 1894, 71—156.
- [82] P o y n t i n g J. H., The mean density of the Earth, London, Griffin, 1894.
- [83] P o y n t i n g J. H. and G r a y P. L., Experiment in search of a directive action, of one quartz crystal on another, *Philos. Trans.* 192 (A), 1899, 245—256.
- [84] P o y n t i n g J. H. and P h y l l i p s P., An experiment with the balance to find if change of temperature has any effect upon weight, *Proc. Roy. Soc. of London* 76, 1905, 445—457.
- [85] R e i c h F., Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwaage, Freiburg, 1838.
- [86] R e i c h F., Neue Versuche mit der Drehwaage. Zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, *Abh. math. -phys. Cl. der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissensch. (Leipzig)* 1, 1852, 383—470; *Annalen d. Phys. und Chem.* 85, 1852, 189—198.
- [87] R i c h a r z F. und K r i g a r - M e n z e l O., Bestimmung der Gravitationsconstante und der mittleren Dichtigkeit der Erde durch Wägungen, *Abh. Kgl. Akad. der Wissensch. zu Berlin*, 1889.

- [88] Richarz F. und Krigar-Menzel O., Gravitations-constante und mittlere Dichtigkeit der Erde, bestimmt durch Wagungen, Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin 48, 1896, 1305—1318.
- [89] Russel H. N., On Majorana's theory of gravitation, Astrophys. J. 54, 1921, 334—346.
- [90] Shaw P. E. and Davy N., Newtonian constant of gravitation as effected by temperature, Philos. Trans. (A) 216, 1916, 349—392.
- [91] Shaw P. E. and Davy N., The effect of temperature on gravitation attraction, Proc. Roy. Soc. (A) 102, 1922, 46—47.
- [92] Schlichter L., Caputo M. and Hager C., An experiment concerning gravitational shielding, Journ. G. R. 70, N 6, 1965, 1541—1551.
- [93] Southern L., Experimental investigation as to dependence of gravity on temperature, Proc. Roy. Soc. (A) 78, 1906, 392—403.
- [94] Southern L., Mass and weight for an radiative substance, Proc. Roy. Soc. of London (A) 84, 1910, 325—344.
- [95] Sterneck R., Untersuchungen über die Schwere im Innern der Erde, ausgeführt im Jahre 1882 in dem 1000 Meter tiefen Adalbert Schachte des Silberbergwerkes zu Příbram in Böhmen, Mitteil. d. K. k. militär. geogr. Inst. zu Wien 2, 1882, 77—120; 4, 1884, 89—155.
- [96] Sterneck R., Wiederholung der Untersuchungen über die Schwere im Innern der Erde, Mitteil. d. K. k. militär. geogr. Inst. zu Wien 3, 1883, 59—94.
- [97] Sterneck R., Untersuchungen über die Schwere im Innern der Erde, ausgeführt im Jahre 1885 in dem Abrahamschachte des Silberbergwerkes. «Himmelfahrt — Fundgrube», Mitteil. d. K. k. militär. geogr. Inst. zu Wien 6, 1886, 97—119.
- [98] Tängl K., Versuch über die Gravitation mit einer Drehwaage, deren Gehänge in Wasser taucht, Math. und naturwiss. Anzeiger d. Akad. d. Wissensch., Budapest 43, 1926, 342—350.
- [99] Tomashek R., Tidal gravity measurements in the Shetlands; effect of the total eclipse of June 30 1954, Nature 175, N 4465, 1955, 937—942.
- [100] Tomashek R. and Groten E., Untersuchung von Gravitationswirkungen während der totalen Sonnenfinsterniss am 15 Febr. 1961, Nachrichten aus dem Karten und Vermessungswesen, N 25, 1963, 17—26.
- [101] Uotila U., Teoretical gravity formula corresponding to current gravity holdings. (Abstract), Journ. G. R. 67, N 9, 1965, 3605.
- [102] Wilsing J., Über die Anwendung des Pendels zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, Sitzungsber. d. Kgl. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin, 1885, 13—15.
- [103] Wilsing J., Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde mit Hilfe eines Pendelapparatus, Publ. d. Astrophys. Obs. zu Potsdam 6, N 22, 1887, 35—127.

- [104] Wilsing J., Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde mit Hilfe eines Pendelapparatus, Publ. d. Astrophys. Obs. zu Potsdam 6, N 23, 1889, 133—192.
- [105] Y a p l e e B., K n o w l e s S., S h a p i r o A., C r a i g K. and B r o w e r D., The mean distance of the Moon as determined by radar, Bull. astr. 25, 1965, 81—93 (21 IAU-Symp.).
- [106] Z a r a d n i č e k J., Resonanzmethode für die Messung der Gravitationsconstante mittels der Drehwaage, Phys. Zeitschr. 34, 1933, 126.

Сокращенные обозначения изданий

Philos. Trans.— Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

C. R.— Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris.

Journ. G. R.— Journal of Geophysical Research.

Указатель имен

Агалецкий П. И. 144
Аустин Л. [Austing L.] 140

Бейли Ф. [Baily F.] 46, 48, 50—57,
87, 88, 90—92, 104

Бейль Ж. [Baille J.] 54—57, 86, 87,
90—92

Берже А. [Burgat A.] 35—38

Боголюбов Н. Н. 148

Бойс К. [Boys C.] 5, 57—60, 86, 87,
91, 92

Борелли Дж. [Borelli G.] 12

Брагинский В. В. 6, 9, 142

Браун К. [Braun C.] 5, 69—74, 87,
91, 92, 177

Бугер П. [Bouguer P.] 35—38, 94

Вульо И. 12

Вюресс Г. [Burgess G.] 126—129,
134—136

Вильзинг И. [Wilsing J.] 5, 113—120,
122, 134, 135

Галилей Г. [Galilei G.] 11, 12

Галлей Э. [Halley E.] 13, 14

Гамильтон [Hamilton] 30

Гаусс К. [Gauss K.] 19

Гершун А. 5, 131, 134, 135

Грей П. [Gray P.] 138

Гротен Е. [Groten E.] 141

Грушинский Н. П. 27, 141

Гук Р. [Hooke R.] 12, 13, 89

Гюйгенс Х. [Huygens Ch.] 12

Джемс Р. [James H.] 35, 36

Джулио К. [Giulio C.] 35, 37, 39

Дике Р. [Dicke R.] 5, 9, 138, 139, 143,
145

Дирак П. [Dirac P.] 143

Доброхотов Ю. С. 141

Дэви Н. [Davy N.] 139

Зарадничек И. [Zaradnicsek J.] 5, 69,
122—124, 126, 134, 135

Зельдович Я. В. 143

Иваненко Д. Д. 143

Иордан П. [Jordan P.] 143

Йолли Ф. [Jolly F.] 5, 92, 94—98,
104, 108, 109, 111, 113, 134, 136

Кавендиш Г. [Cavendish H.] 5, 16,
41, 46—52, 74, 87, 91, 92, 94, 108,
126, 128, 133, 136

Капуто М. [Caputo M.] 27, 141

Каральникова И. И. 141, 142

Карлини Ф. [Carlini F.] 35, 37, 39

Каула В. [Kaula W.] 30, 31

Кеплер И. [Kepler J.] 10—12, 17, 18,
31, 144

Кёниг А. [König A.] 104, 110

Клеро А. [Clairaut A.] 25, 26

Коперник Н. [Copernic N.] 10

Корню А. [Cornu A.] 54—57, 86, 87,
90—92

Кригар-Менцель О. [Krigar-Menzel O.]
5, 104, 106—108, 111, 113

Крылов А. Н. 19

Кук А. [Cook A.] 31

Кунц Я. [Kunz J.] 122

Ласка В. [Laska W.] 121, 122, 135
Липпман Г. [Lippmann G.] 21

Майер А. [Mayer A.] 110, 112

Майоран К. [Maiorana Q.] 140, 141,
143

Маккензи А. [Mackenzie A.] 138

Манденхалл Т. [Mendenhall T.]
35, 37, 39

Мартынов В. К. 142

Марусси А. [Marussi A.] 93

Маскелайн Н. [Maskelyne N.] 36,
49, 94

Мах Э. [Mach E.] 145

Митропольский Ю. А. 148

Михайлов А. А. 6

Мичел Д. [Michell J.] 46, 47, 49, 52,
74, 108, 126, 128, 133, 136

Ньютон И. [Newton I.] 7, 12—17,
19, 34—36, 41, 46, 138, 178

Окуда Т. [Okuda T.] 141

Орлов А. Я. 26

Парийский Н. Н. 141

Пикар Ж. [Picard J.] 15

Планк М. [Planck M.] 21, 22

Плейфэр Ж. [Playfair J.] 35, 36, 39

Подобед В. В. 6

Пойнтинг Дж. [Poynting J.] 5, 6,
53, 98—103, 108, 109—113, 129,
138, 139

Пратт Ф. [Pratt F.] 40

Радзиевский В. В. 141

Райх Ф. [Reich F.] 49—52, 55, 87,
90—92

Рен Х. [Wren C.] 13

Реннер Я. [Renner J.] 93

Рессел Г. [Russel H.] 141, 143

Рихарц Ф. [Richarz F.] 5, 104, 106—
108, 110, 111, 113

Руденко В. Н. 142

Рукман Г. И. 142

Сабин Э. [Sabine E.] 35, 37, 39

Созернс Л. [Southern L.] 138, 139

Станюкович К. П. 143

Тангль К. [Tangl K.] 126, 129, 135

Твинг Ч. [Thwing C.] 140

Томашек Р. [Tomaschek R.] 141

Уиллер Дж. [Wheller G.] 143

Уотила У. [Uotila U.] 26

Филлипс П. [Phillips P.] 139

Фишер И. [Fischer I.] 26

Харер К. [Hager C.] 141

Хаттон Ч. [Hutton Ch.] 35, 36, 39,
46

Хейл П. [Heyl P.] 5, 9, 69, 74—92,
109, 120, 122, 138, 177, 178

Хикс В. [Hicks W.] 54

Хирн Г. [Hearn G.] 53, 54

Хржановский П. [Chrzanowski P.]
5, 9, 69, 74, 80—92, 109, 177, 178

Шварцшильд М. [Schwarzschild M.]
144

Шлихтер Л. [Schlichter L.] 141

Шоу П. [Shaw P.] 139

Штернек Р. [Sterneck R.] 35, 37, 39,
94

Эверест Дж. [Everest G.] 40

Эдьед Л. [Egyed L.] 93

Эри Дж. [Airy G.] 35, 37, 40, 94

Этьеш Р. [Eötvös R.] 37, 61, 62—69,
80, 87, 91, 92, 122, 129, 138, 139